traduction abrégée de l'article de Martin Gardner
Scientific American - Nov. 1959 - pp. 181-188.

avril 1959. meeting annuel de l'American Mathematical Society
E. T. Parker - Remington Rand Univac Corporation
R. C. Bose -
S. S. Shrikhande - } University of North Carolina.

Léonard Euler (1707-1783) dans les dernières années de sa vie, publie Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques (nommés de nos jours : carrés gréco-latins) [Verh. Genootsch. der Vlissingen, 9 (1782), pp. 85-232]

Origine dans le problème "amusant" récréation mathématique) arranger les as, rois, dames, valets d'un jeu de cartes en un carré de façon que ..

étant donnés 2 carrés latins, ils sont orthogonaux, si ~~chaque lettre~~ lorsqu'on les superpose chaque lettre de l'un ne se combine qu'une fois avec chaque lettre de l'autre, EX.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

α	β	γ
γ	α	β
β	γ	α

Pas d'ordre 2. ce qui est facile de voir
mais d'ordre 3, 4, 5 - oui
ordre 6 . ~~correspond~~ correspond aussi à une "récréation m." 6 régts, 6 off. de 6 rangs diff..

Euler démontre que le probl. est possible pour n impair
pour n multiple de 4

Euler conclut " Je n'hésite pas à conclure qu'il n'y a pas de [carrés g. l.] d'ordre 6 et qu'il en est de même pour n = 10, 14, etc. " Conjecture
($n = 4p+2$ ~~[illegible]~~)

[illegible]

(et qui porte sur le nombre des nombres premiers inférieurs à x qui est supposé toujours inférieur au logarithme intégral de ce nombre. La conjecture est vérifiée pour tout nombre inférieur à 10^7; des sondages partiels jusqu'à 10^9 la confirment. Et cependant on démontre (attention ! ici on démontre, ce n'est pas comme dans le cas précédent où l'on « observait ») — qu'il y a un nombre (dit de Skewes) tel que l'inégalité s'inverse pour un nombre plus petit et, de plus, qu'il y a (ensuite) une infinité de telles valeurs inversant cette inégalité. Ce nombre de Skewes a pour valeur $10^{10^{10^{34}}}$ — c'est-à-dire un « très grand » nombre [5, p. 17]

Dans les deux cas, on se trouve donc en face d'assertions qui, ~~issues~~ s'il ne s'agissait pas de mathématiques et qu'on se plaçât dans le domaine de l'accessibilité humaine, devraient être considérées comme empiriquement certaines. Il en résulte que, dans le domaine de la théorie des nombres, il n'est pas possible de donner une limite supérieure à l'intérêt que présente un nombre et ceci, contrairement à l'opinion de Borel dans son ouvrage sur les nombres inaccessibles [2]

X

On peut « prouver » (Villeurs [4 p. 148]) que tout nombre entier est « intéressant ». Mettons dans une première classe tous les nombres intéressants et dans une seconde ceux qui ne le sont pas; le plus petit de ceux-ci sera, de ce fait même, intéressant et on devra le placer dans la première classe. La seconde classe présentera donc alors de nouveau un nombre minimum qui.... et ainsi de suite.

Borel aurait objecté qu'est intéressant un nombre sur lequel les mathématiciens ont quelque chose à dire (et dont on peut démontrer quelque propriété); il accordait, par ailleurs, que pour une pensée toute-puissante, effectivement, tout nombre entier « a une personnalité » [2, p. 57] ~~présente quelque propriété spécifique~~. Il y a là simple question d'opinion, mais on peut cependant estimer ~~toutefois penser~~ que Borel poussa parfois un peu loin l'empirisme dans le sens limitatif. C'est ainsi qu'il pense qu'"on... doit regarder comme inaccessibles les nombres dont le nombre de chiffres... atteint ou dépasse simplement 18 ou 20." [2, pp. 51-52]

Trad M G.

Une dernière remarque : "les concepts employés ne sont même pas près de ceux de l'arith. mod. "profonde"."

R. C. Bose et S. S. – On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal latin squares of order 4t + 2 (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 45 (1959), 734 – 737)

E. T. Parker. Orthogonal latin Squares (Id. – , 859 – 862)

C. R. n° 3343 et 3344 du vol. 21 (1960) par J. K. Goldhaber (p. 622)

Carrés G. L. (suite).

G. Tarry (1901) prouve par énumération exhaustive qu'effectivement la conjecture est exacte pour $n = 6$

Marshall Hall. Surveys in applied Mathematics vol. IV

avec une SWAC, travail de 100 h. ne trouve aucun c. g. l. de 10 — mais pour une énumération exhaustive il faudrait au moins un siècle de travail de la plus rapide des machines à calculer actuelles

[Math. Rev.

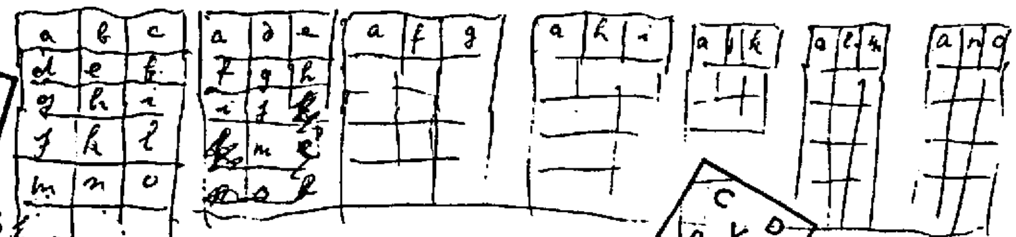
On rappelle l'emploi des carrés latins dans les plans d'expérience.

Série :

1) E. T. Parker fit une découverte (on ne dit pas laquelle) qui jetait des doutes sur la conjecture d'Euler Amer. Math. Soc. Notices, 5 (1958), p. 815

2) Bose - (en conférence) fixe des règles pour la construction de c. g. l. d'ordre élevé

3) B. et S. S. Shrikhande construisent un c. g. l. d'ordre 22 $(= 4.5+2)$
R.C.
(méth. basée sur la solution d'un problème de Kirkman (1850)
T. B.
15 filles rangées par 3 (en 5 rangs p. c.) de façon que pendant 7 jours n'ait pas plus d'une fois ~~eue~~ voisines sur son rang.
lesquelles



$21 \times 5 = 105$

("balanced incomplete block design)

4) Parker indique la méthode pour construire de c g l d'ordre 10 et en construit effectivement un

P B et S en ont construit plusieurs qui contiennent tous un c. g. l. d'ordre 3

5) Enfin P. B. S. établissent que la conjecture d'Euler pour $n = 4p+2$ est fausse pour tout $n > 6$

On dit billion [X^{18}] et ainsi de suite jusqu'aux nonillions, car on n'a guère besoin d'aller plus loin dans l'usage des nombres.

Leibniz Nouveaux Essais

l. II ch. 16

Borel pas p. 51

Borel - est-il besoin de dire ?

propositions de Fermat :

si p divise 3^x+1 alors $p \not\equiv \pm 1$ mod. 12

p 5^x+1 $p \not\equiv \pm 1$ mod 10

il y a un nombre infini de nombres premiers

$p \equiv 1$ 1er cas ex. 61 divise 3^5+1

$p \equiv \pm 1$ 2e cas (Sierpinsky)

André Schinzel - Sur deux propositions fausses de P. Fermat - C R Ac Sc. Paris 249 (1959) - 1604 - 1605

Borel. ch. VI p. 50 et suiv.
On ne connaîtra jamais tous les nombres de 100 chiffres, pratiquement impossible de déterminer une propriété d'un nombre de cent chiffres donné...
La liste de tous les nombres de 100 chiffres (ou moins) remplirait 10^{96} volumes de 500 pages in-8. 10^{90} bibl. de un milliard de volumes.

p. 51-52. "on peut et doit regarder comme inaccessibles les nombres dont le nombre de chiffres est bien moins élevé, atteint ou dépasse simplement 18 ou 20."
en fait billion = milliard $= 10^9$
en allemand = = un million de million $= 10^{12}$

p. 57. « Pour celui qui connaîtrait toutes les propriétés des nombres, il est probable que deux nombres de 50 chiffres apparaîtraient comme ayant chacun une personnalité propre, tout comme deux livres ~~importants~~ différents en langue française »

p 57 " un tel nombre ne présente aucun intérêt pour le mathématicien qui sera toujours incapable d'en démontrer la moindre propriété! »

p. 30 "un tel être pour être intéressant aux yeux des mathématiciens doit avoir au moins 2 propriétés (en y comprenant celle au moyen de laquelle il a été défini).

 157

Ces 3 faits ne doivent pas être pris comme de simples ~~faits~~ curiosités, ou des anecdotes ; ils ont — me semble-t-il — une valeur ~~morale et~~ épistémologique et morale ou, si l'on veut, de morale épistémologique.
~~Ils permettent de limiter le sens du mot « évidence »~~
Si l'on reprend en effet ces trois conjectures, il semble « évident » qu'elles étaient « évidentes » — que de tous les carrés gréco-romains possibles, il n'y en eût que de 2 ordres (2 et 6) qui fussent impossibles paraissait singulier ; combien plus raisonnable de penser qu'il en y eût plutôt une (série 4n+2) ; qu'il faille attendre un nombre ~~rde~~ de plus de 361 chiffres pour qu'une conjecture aussi "simple" que "la conjecture de Polya ~~l'expansion de nombres qui etc~~" ; que la conjecture [de Gauss] soit fausse

en.

Conjectures fausses en théorie des nombres

Je ne me satisfais d'aucunes conjectures
(Corneille, *Horace*, acte I, scène 2)

On peut s'étonner que le mathématicien se permette parfois des ~~conjectures~~ puisque son activité propre est, éminemment, de démontrer et non d'anticiper sur les résultats (possibles) de démonstrations (possibles). Cependant, il est historiquement vrai que des mathématiciens ont énoncé des conjectures (c'est-à-dire des résultats sans démonstrations) et que ces conjectures ont été prises en considération par les autres mathématiciens. Certaines sont fameuses, telles celle de Riemann sur les zéros de la fonction dzéta ou celle dite « hypothèse du continu » ; elles font d'ailleurs l'objet de travaux non-conjecturaux portant sur ~~la~~ la recherche d'énoncés équivalents. Quant au "grand" théorème de Fermat, la question reste toujours ~~[illegible]~~ ouverte de savoir s'il fut, un jour, réellement démontré. Gauss en doutait. [1, p. 317]

On remarquera que le domaine élu des conjectures est la théorie des nombres parce que, tout simplement, il est facile d'en faire (Gauss se flattait d'en énoncer autant qu'on en voulait [1, p.]) et que, par contre, les démonstrations semblent souvent défier toute possibilité d'attaque. Il est facile d'énoncer (comme Goldbach) que tout nombre[1] pair est la somme de deux nombres premiers ; il est horriblement difficile de démontrer (avec Vinogradov) que tout nombre impair, suffisamment grand, est la somme de trois nombres premiers[1]. Ce que je proposerai ici à l'attention ~~[illegible]~~ du lecteur, c'est le cas – privilégié – de conjectures en apparence « infiniment probables » ~~[illegible]~~ qui ~~[illegible]~~ sont, en fait, fausses ; il se trouve qu'il y en a plusieurs exemples dans l'histoire récente des mathématiques.

G. Pólya (auteur d'un ouvrage sur *Les Mathématiques et le Raisonnement plausible*) ~~[illegible]~~ a conjecturé qu'au delà de 2, il y a autant de nombres qui ont un nombre pair de facteurs premiers que de nombres en ayant un nombre impair. On ne sait pas démontrer cette proposition, mais pourquoi ne pas l'énoncer ? Elle semble fort « raisonnable. » De plus on l'a vérifiée jusqu'à 800.000. Même ainsi vérifiée, cela reste une simple conjecture. Et de plus, elle est fausse, et fausse pour une valeur voisine de $1,845 \times 10^{361}$ (naturellement ce résultat a été obtenu en utilisant de puissantes machines à calculer) [6]

Une conjecture analogue est celle qui ~~[illegible]~~ Gauss lui-même (qui pourtant n'aimait pas les conjectures) [illegible]

(1) si l'on tient cette note, un nombre doit être pris dans le sens de « nombre entier ».

Cette notion de nombre « intéressant » est évidemment purement péri-mathématique ; elle peut cependant attirer l'attention de mathématiciens. G. H. Hardy, allant voir Ramanujan malade, lui dit (c'est là un sujet de conversation comme un autre) : « J'ai pris pour venir un taxi portant le ~~n°~~ numéro 1729 ; c'est là, me semble-t-il, un nombre bien peu intéressant — Pas du tout, répliqua Ramanujan après quelques instants de réflexion. C'est le plus petit nombre décomposable de deux façons différentes en une somme de deux cubes. » [5 p. 12]

Or il existe un exemple amusant d'un nombre de 18 chiffres qui, bien loin d'être inaccessible, présente cette particularité d'offrir des points de repère mnémotechniques faciles pour sa multiplication par tout nombre inférieur à 200 [3 (p. 89-91)]. Il s'agit là d'un « truc » présenté par des pseudo-calculateurs prodiges ; ils écrivent au tableau noir un nombre « au hasard » et donnent avec aisance les résultats de toute multiplication indiquée ci-dessus. Le nombre choisi « au hasard » est le nombre indiqué ci-dessus, dont on joue alors de ~~la~~ l'« inaccessibilité » apparente.

L'ouvrage de Borel a été écrit sans qu'il y soit jamais fait allusion aux machines à calculer actuelles (et futures). Il ne paraît plus permis d'éliminer aussi facilement les « grands nombres » (~~les fonctions, pour si grandes qu'elles soient~~ et les fonctions qui posent cette « grandeur » n'ont évidemment rien à voir avec les problèmes concernant l'« infini ».) et de les considérer comme tous plongés dans un brouillard indistinct et tels qu'ils n'aient plus rien à apprendre sur ce qu'on peut inférer d'après les « petits » nombres. Que le calcul, grâce aux machines à calculer, des 25.000 premiers zéros de la fonction dzêta confirme l'hypothèse de Riemann ; et que le « grand » théorème de Fermat soit vrai pour tout exposant inférieur à 4.001, cela entraîne ~~moins~~ encore la conviction ~~qu'avant~~ ~~[illegible]~~ que du temps où l'on ne possédait pas ces moyens, certes, puissants ; mais la seule puissance demeure la démonstration.

× × ×

Une autre exemple de conjecture ~~[illegible]~~, en apparence bien fondée et cependant démontrée fausse récemment, est la fameuse conjecture d'Euler concernant les carrés gréco-latins [5]. On peut présenter un carré gréco-latin comme un échiquier de n^2 cases, tel que dans chaque case il y ait une lettre grecque et une lettre latine et que ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

la lettre grecque aussi bien que la latine ne se présente pas de nouveau dans les carrés du même rang et de la même colonne. Ces carrés gréco-latins ont pour origine des problèmes de «mathématiques amusantes», mais ils ont maintenant un intérêt pratique dans les plans d'expérience. Il est ~~[illegible]~~ immédiat qu'il ne peut exister ~~[illegible]~~ de carrés gréco-latins d'ordre 2, et ~~[illegible]~~ il est assez aisé d'en construire d'ordre 3, 4 et 5. Mais arrivé à 6, on n'y parvient plus. Euler en 1782 démontra que le problème est possible pour n impair et pour n multiple de 4 ; et il conjectura qu'il est impossible pour $n = 4p+2$, c'est-à-dire pour $n = 6, 10, 14$, etc. En 1901, G. Tarry confirma cette conjecture pour $n = 6$ par «énumération exhaustive.» Mais au-delà il n'était plus possible d'employer un tel procédé ; on mit sur le problème une machine à calculer qui, après cent heures de travail, ne ~~[illegible]~~ trouva aucun carré gréco-latin d'ordre 10 ; mais pour que l'énumération fût exhaustive, il aurait fallu que la machine s'attelât à la tâche pendant un siècle.

Or, brusquement, à la suite d'une découverte d'E.T. Parker en 1958, R.C. Bose, S.S. Shrikhande et Parker lui-même démontrèrent que la conjecture d'Euler était fausse au-delà de $n = 6$ et construisirent effectivement des carrés gréco-latins d'ordre 10 (et même d'ordre 22).

Ici on constatera encore que toute considération «empirique» est négligeable en mathématique. En dehors du cas trivial de $n = 2$, il est assez singulier en effet que ce soit seulement pour $n = 6$ qu'il ne soit pas possible de construire de carré gréco-latin. Il était «raisonnable» de penser, puisque les énumérations exhaustives dépassaient les possibilités humaines (et même celles des machines actuelles), que 6 n'était pas une exception et que toute la série des nombres de la forme $4p+2$ (2, 6, 10, 14, etc.) présentait cette propriété (négative). ~~[illegible]~~ Ce n'était,

~~[illegible]~~ somme toute, qu'une opinion. Une démonstration en montra la vanité. La répétition empirique n'est pas un élément de certitude. Lorsque une ~~la~~ conjecture a plutôt tendance à être confirmée ~~[illegible]~~, il faut parfois aller chercher très loin cette certitude. J'ai dit plus haut que Vinogradov a prouvé que tout nombre impair suffisamment grand est la somme de trois nombres premiers. Ce « suffisamment grand » veut dire : supérieur à $10^{10^{10^{17,86}}}$. Pour le moment, on ne peut démontrer plus. ~~Et pourtant, tout mathématicien, dans le fond de son cœur, pense que la proposition est vraie pour tout nombre inférieur, mais ce n'est qu'une opinion [illegible] plus discret que celui [illegible] nous voulons tous [illegible]~~

Hors des mathématiques, on le sait, on n'a pas besoin d'aussi grands nombres pour se faire une opinion. Il est troublant de constater que les grands nombres ne sont pas indifférents.

comme toute qu'une opinion : une démonstration en montra la vanité. A partir du moment où, en théorie des nombres, on n'a plus le bénéfice de l'induction de n à $n+1$, la vérification d'une proposition (pour un nombre nécessairement fini de valeurs de n) n'entraîne en aucune façon la vérité, aussi loin qu'on la pousse, puisque, comme nous ~~avons~~ l'avons vu ~~pour les conjectures de Pólya et de Gauss~~ par nos deux premiers exemples la fausseté ne s'en découvre que lorsqu'on atteint de très grands nombres. (Si l'on accorde à la terre un âge de cinq milliards d'années, le soleil se sera levé $1,825.10^{12}$ fois, nombre infime par rapport à $1,845 \times 10^{361}$ qui infirme la conjecture de Pólya.)

~~[illegible]~~

x x x

Les « cas » que nous venons de citer ne doivent pas être réduits à de simples « curiosités » d'ordre anecdotique. On peut se demander si cette situation, ~~particulière à la théorie des nombres~~, n'a pas pour raison profonde le théorème d'incomplétude de Gödel ; ~~on ne peut~~ il n'est possible (par les méthodes actuelles) de n'obtenir autre chose que des « fragments » de la théorie des nombres. Ce n'est d'ailleurs là, de ma part, qu'une simple conjecture.

Raymond Queneau

Bibliographie

165

[1] E.T. Bell. The development of Mathematics, 2ème éd.. New-York, 1945

[2] Emile Borel. Les nombres inaccessibles, Paris, 1951

[3] Martin Gardner. How three modern mathematicians disproved a celebrated conjecture of Leonhard Euler, Scientific American, 1959, novembre, pp. 181-188.

[4] d° - Mathematical Puzzles and Diversions, New-York, 1959.

[5] G.H. Hardy - Ramanujan, Londres, 1940

[6] C.B. Haselgrove - A disproof of a conjecture of Pólya, Mathematika, tome V, 1958, pp. 141-145

[7] Robert Tocquet - Les calculateurs prodiges et leurs secrets, Paris, 1957,

[8] J.G. van der Corput. Sur la démonstration de l'hypothèse de Goldbach pour les nombres impairs donnée par M. Vinogradov, Paris, 1938

et dont ni lui, ni personne ne — démonstration (dans l'état actuel des choses)

Gauss était un grand devinaire de conjectures en théorie des nombres. Invité en 1818 par l'Académie des Sciences à participer à un concours ayant pour sujet le dernier théorème de Fermat, il répondit qu'il pouvait énoncer à volonté autant de ~~conjectures~~ « théorèmes » analogues que l'on voudrait ; il mettait donc le fameux « théorème » dans le même sac qu'une conjecture comme celle de Waring ou de Goldbach. Il y a un certain nombre d'exemples ~~[illegible]~~ de propositions énoncées sans démonstration par de très grands mathématiciens et dont on peut se demander si ce ne furent pas de simples conjectures. Il existe ainsi une proposition de Gauss énoncée en 1801 qui ~~ne~~ n'a été démontrée qu'en 1944 par C. L. Siegel. Comme

sur une certaine valeur moyenne asymptotique dans la théorie du nombre de classes des formes quadratiques binaires

Cette proposition ne pouvait avoir été suggérée par des exemples numériques, on ne peut savoir comment Gauss put l'« admettre » — s'il n'en avait pas de démonstration satisfaisante.