

Il est généralement admis à l'heure actuelle, (en France et ailleurs) que le plus important traité de mathématique contemporain est signé d'un nom de fantaisie, pis même hérité d'une plaisanterie de normaliens. Ce fut à l'origine celui d'un grand et fictif mathématicien suédois qui honorait l'Ecole Normale de sa visite et disait se nommer Nicolas Bourbaki. J'ignore si à cette époque lointaine, les dits jeunes gens avaient déjà envisagé la rédaction de leur traité, inspiré par le désir de fonder rigoureusement la mathématique (moderne - aussi bieh qu'ancienne), en tout cas le pseudonyme se trouvait prèt. Pourquoi Bourbaki ? Parceque ces jeunes gens se proposaient d'introduire en France des méthodes demeurées le privilège de l'étranger ? Peut-être faut-il voir dans ce but (patriotique) la raison du choix de ce pseudonyme ; ils estimaient en effet, que la mathématique française, sclérosée, alluit au désastre. Le brave général Bourbaki devait la tirer de là.

Les grandes découvertes mathématiques "contemporaines" (entre guillements) connues à ce jour du grand public très cultivé sont les géomètries non euclidiennes, les espaces à plusieurs dimensions (confondus souvent avec les précédentes), l'existence d'une "logistique" certes ridiculisable - bref ce qu'on trouve chez Henri Foincaré. On sait tout de même qu'il y a une théorie des ensembles (qui date des années 1875) et une théorie des groupes (qui remonte au début du XIX° siècle), cette dernière avantageuse-



ment depoter en raison de l'existence tracique, bouleversante et romantique d'un jeune mathématicien qui l'utilisa de façon géntale. On ignore, par contre, qu'il y a à peu près autant de différence entre la mathématique contemporaine et la mathématique de l'époque de Poincaré (à ses débuts) qu'entre celle-ci et la mathématique grecque. A vrai dire, on commence à le savoir ; des efforts sont faits pour "moderniser" l'enseignement ; j'y reviendrai plus loin. Quant à initier les vieux, ce sera assez difficile ; un bon mathématicien qui a terminé ses études vers 1930 et qui n'a pas suivi le développement des mathématiques modernes, est encore plus dérouté en ouvrant le traité de Bourbaki que quelqu'un qui n'y connaît rien. Des habitudes mentales sont prises et il est difficile de s'en dégager, le " quelqu'un qui n'y connaît rien " a plus de chances de s'y retrouver. La raison de ce phénomène est elle-même double : l'abstraction mène à considérer des structures extrêmement simples qui seraient celles mêmes de l'esprit humain (d'après Piaget) et qui doivent donc être accessibles à tout esprit non#prévenu ; un enfant (non complexé) prend intuitivement et immédiatement contact avec les notions d'ensemble, de réunion, d'intersection, d'ordre, etc. (1) Qu'est-ce qui fait la difficulté de lecture du traité de Bourbaki pour un mathématicien des années 30 ? C'est qu'il cherche à voir, élaborer des notions lui, pourquoi les mathématiciens ont été amenés à descate de qui lui paraissent parfaitement inutiles, pour ne pas dire saugrenues, lui qui est habitué au "concret" des fonctions continues gentiment dérivables ou des fonctions analytiques d'une variable complexe. Pour qui a découvert

(1) Ma fent objectes fui avec cette affeinte unon complexion on demense envere bien boin te la notion de telation collectivisante et du Schema de sélection et rémison, c'er à die du fondement bonebakiste de la théorie des ensembles.

D





la théorie des groupes de substitution dans Serret (ou même dans Verriest),
le visage qu'elle prend dans Bourbaki (en partie refoulée dans les exercices)

nouvelle présentation, on peut se demander en pensant aux non-initiés:

"Que peut-on y comprendre, si on ne sait pas déjà de quoi il s'agit?"

them, if fait audit of faite.

The reproduct à Bourbaki son abstruction extrême. Il la partage avec nombre d'auture contemporains, lesquels parfois s'en expliquent.

Algebraic Topology (1952) qui donnent une axiomisation d'une théorie chère à bon nombre de Bourbakistes (quoique son traité n'en parle pas encore), écrivent dans las préface : "Aucune raison n'est donnée des axiomes. On demande au débutant de les prendre tels quels - comme articles de foi - jusqu'à la fin du chapitre III. Ce ne doit pas être difficile, car la plupart de ces axiomes sont naturels, et leur ensemble possède une beauté interne suffisante pour inspirer foi au moins crédule. "Control of the control o

Utilité future, beauté interne : telés sont les deux rassons qui doivent éviter au débutant les inquiétudes quant au choix de tel axiome plutôt que de tel autre. Utilité, beauté, telécontrochement de l'art et l'en caractères de la mathématique, ceux qui la rapprochent de l'art et l'en différenciem Une théorie mathématique vivante (et vraie en soi - mais c'est une autre histoire) est à la fois belle et utile. Et ceci sans qu'il y ait contradiction entre ces deux aspects. Une "demande" de la physique amène parfois la naissance de théories caillouteuses, le praticien est

67 UMENTATION RAYMOND QUENEAU, Bibliothéque principale, place du Marché, 4800 VERVIERS (BELGIQUE) 87/33 46 CENTRE DE DOC

pressé; le mathématicien fignole ensuite son travail et la route raboteuse devient la belle autostrade sur laquelle le praticien roule sans difficultés. Le physicien taille son chemin à la serpe, à la pelle, à la pioche. Les mathématiciens trouvent le sentier intéressant, l'aménagent. Si le physicien a besoin que son chemin soit plus large ou aille plus loin, le mathématicien arrive avec son boule-doseur. Puis il perfectionne, et ainsi de suite. Parfois même il trace une route qui traverse une région où le physicien ne se sent pas le besoin d'aller; puis vient un temps où le dit physicien éprouve le besoin de voir un peu de/côté-là et il se réjouit de trouver la route prête.

maximum axiomatique (et nous verrons plus loin ce qu'il faut entendre par là (), les développements se font en fonction du "concret" à atteindre, c'est-à-dire d'une part des desiderata de la physique, d'autre part des problèmes "vivants" (je dirai presque "à la mode") pour les mathématiciens d'aujourd'hui. Si le lecteur (prévenu) trouve Bourbaki "abstrait" - trop abstrait - c'est parce qu'il ne sait peut-être pas ce qui demande la physique, ses besoins : quelle chance pour Kepler que la théprie des coniques ait précxisté ! Quelle chance pour Einstein d'avoir trouvé tout prêt le calcul tensoriel production différentiel des coniques ait précxisté ! Quelle chance pour Einstein d'avoir trouvé tout prêt le calcul tensoriel production différentiel des considerations. P.A. Kac-Mahon, mathématicien anglais, écossais même (1854-1929) la thorie des reftangles latins, par goût du paradoxe et défi à l'utilitarisme ; il la jugeait à tout jamais stérile et

(1) D'une façon paire et non a formalisée

C D R Q



CENTRE DE DOCUMENTATION RAYMOND QUENEAU, Bibliothéque principale, place

đ

Marché, 4800 VERVIERS

(chital

inutile. Elle sert au contraire maintenant coursement dans les plans d'acceptant de la physique a besoin de notions extrêmement abstraites. Le physicien peut même élaborer une notion contradictoire comme la fonction de Dirac. Absurde, cette fonction , nulle pour toute valeur de la variable mais dont l'intégrale est égale à 1 lorsque la variable tend vers 0.

Or, on se sert de cette fonction, elle est même fort utile en électricité.

Il y a là un "problème" - résolu par Laurent Schwartz avec sa théorie des distributions - théorie abstraite, axiomatique (suraxiomatisée maintenant) et qui permet de fonder rationnellement la théorie de cette pseudo-fonction et permet augsi au physicien de l'utiliser sans fausse honte.

Is lecture des Eléments, dit le prospectus, "ne suprose (...) en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement "une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction ". Naturellement, il ne faut pas prendre cette phrase trop au pied de la lettre ; et le "certain" peut être qualifié de litote. Dans un autre passage de ses Eléments, Bourbaki dit qu'il s'adresse aux gens qui sevent au moins lire et compter. Effectivement. Tout livre, (c'est pourquoi la lecture est en un sens liberté de est pas comme la musique), vous offre la possibilité de le refermer. Mais, dira-t-on, si Bourbaki ne s'adresse ni aux vieux mathématiciens enfoncés dans leurs habitudes ni aux lecteurs trop dépourvus, à qui s'adresse-t-il ? En bien, principalement, aux jeunes qui ont une bonne formation mathématique - et qui ont l'esprit "ouvert". Un phénomène remarquable se produit alors : ils rejoignent rapi-

dement et dépassent des maîtres qui ont eu du mal à sortir de l'ornière des mathématiques françaises "classiques" et un peu sclérosées de l'après-guerre de 14-18 (laquelle détruisit un nombre appréciable de jeunes mathématiciens).

Bourbaki se soit engendré lui-même. Son père même peut Aim nommel, c'est

Eilbert, et il eut comme nourrices, entre autres, was der vierte ener
pués parains quasiment tous au nom étrangers.

Poincaré a joué un mauvais tour à la mathematique det à la philosophie française en raillant le grand Péano et sa définition "logistique" (comme on disait alors) du zéro (aussi Bourbaki l'a-t-il reprise sous sa forme actuelle). Son autorité a détourné les mathématiciens français des recherches logiques - tout le développement de la logique moderne s'est fait à l'étranger (à l'exception d'Herbrand, mort jeune), et qui pis est'de l'axiomatique. Or c'était là que se trouvait la source vivifiente de la mathématique, c'était même un retour aux sources grecques, et c'était Hilbert qui dispensait cette eau thérapeutique et rajeunissante. La mathématique française s'est trouvée, et par le fait de la guerre de 14-18 par والمساسانية) l'influence de Poincaré, en pleine crise gérontique. Un peu de retard, et voilà que le retard s'accroît : mathématique, il suit une courbe exponontielle. D'autre part, c'est un lieu commun que la mathématique est une science de "jeunes", c'est autour de 20-25 ans que la mathématique "fait" son oeuvre (admettons-le provisoirement). Vers les années 30, quelques

DE DOCUMENTATION RAYMOND QUENEAU, Bibliothéque principale, place du Marché, 4800 VERVIERS (BELGIQUE) 87/33 46 67



jeunes mathématiciens ont pris conscience du retard pris par les mathématiques françaises non seulement dans l'enseignement (il ne cesse de l'être que depuis peu) mais encore dans la recherche; Et ils créèrent Bourbaki; Et depuis la recherche de la médaille Field, sorte de prix Nobel des mathématiques, Schwartz, Serre et Thom.

Bon, très bien, dira-t-on, votre Bourbaki, qui devuit avoir 20 ans vers les années 30, en a 50 maintenant. Il a nécessairement vieilli, votre fictif mathématicien, il doit avoir pris du retard. Et bien non, Bourbaki n'a pas vieilli parce qu'il ne peut pas vieillir.

Bourbaki, est une collectivité qui se renouvelle par cooptation.

Il a été décidé que les bourbakistes dépassant la cinquantaine ne font plus partie du groupe sinon à titre consultatif et vénéré. Comment travaillent les fourbakistes? On dit que... une rumeur veut que... l'un d'entre eux l'ar départ un trata au maximus soit chargé de la rédaction d'un fascicule. Cette première mouture est envoyée aux différents Bourbaki qui se réunissent ensuite en congrès; on examine tangé cette première rédaction, on la critique: en général il n'en reste rien. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que ces riens intégrés donnent un ensemble non vide de théorèmes, propositions, scholies et, éventuellement, axiomes tous nuls à l'exception d'un nombre fini. It is exception d'un nombre fini que quelques remarques, et des notes historiques qui demandent une considération spéciale.

Il sera peut-être éclairant de commencer par les remarques pui

des lecteurs des théorèmes qu'autrefois on considérait comme, non seulement difficiles mais importants. Les exemples abondent : ainsi l'Exercice !, paragraphe 3 du chapitre V de l'Algèbre demande de " prouver que l'ensemble des nombres transcendants sur Q (l'ensemble des nombres rationnels) a la puissance du continu. If pu encore les exercices du paragraphe ! du chapitre VII correspondant à un ouvrage sur la théorie des nombres ; ou ceux du chapitre III du livre I qui "exécutent" si j'ose directes ordinaux transfinis.

Qu'est-ce à dire ? Comment expliquer que ce con fut théorème important soit devenu simple exercice ? Faut-il supposer le mathématicien actuel plus intelligent que raint d'autrefois ? Il y a là l'aboutissement d'un processus courant dans l'histoire des mathématiques. La démonstration d'un théorème nouveau est parfois extrêmement ardue, compliquée, "involved", et pour tout dire "chinoise"; puis on la simplifie; puis le théorème entre dans l'enseignement; il devient courant; ses simplifications en rendent son usage facile; enfin, s'il n'est pas mon plus nécessaire au "style" actuel, aux développements à venir, il tombe au rang d'exercice. Il y a des exceptions : des théorèmes qui restent toujours difficiles, des théorèmes qui restent toujours essentiels.

Dans les arithmétiques anciennes, pour prendre un exemple simple, un chapitre était consacré à l'addition des toises, un autre à l'addition des onces, etf. Seuls quelques

(>) Til l'ose te dire.

(>) La face le reports inheumités étaient différent, bren mis. Com pa mon éxample soit absolument contraspont, il foure this pervoir cites un bianne l'où l'en distingue l'addition de position de pos

CENTRE DE DOCUMENTATION RAYMOND QUENEAU. Bibliothéque principale, place du Marché, 4800 VERVIERS (BELGIQUE) 87/33 46 67



grands esprits en ces temps-là parvenaient à l'abstraction de l'addition d'objets quelconques. Maintenant on exige (et on obtient en général) cette abstraction d'enfants de huit ans.

Plus récemment, on étudiait longuement les propriétés de l'ellipse (après celles du cercle, bien sûr), puis de la parabole, puis de l'hyperbole. Puis est venu le moment où l'on a étudié globalement, simultanément, les coniques ; et les théorèmes particuliers (dépendant de théorèmes généraux) relatifs à l'ellipse, à la parabole, etc., sont tombés eux aussi au rang de simples exercices.

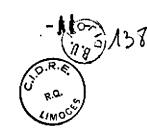
Brown wir de met stick (sin tentest); Siect que dans tout ça, je veux dire dans Bourbaki, il s'agit bien comme l'indique le titre d' "éléments", et ce mot doit être pris, comme tout terme bourbakien, dans son sens fort et exact (cum grano salis). Entre eux - ces Eléments - et les travaux originaux de mathématique moderne, il y a encore un monde. Une bonne connaissance de Bourbaki ne permet pas d'aborder la lecture d'un mémoire de

Serre ou de Grothendieck (même compte tenu de ce que les <u>Eléments</u> sont encore incomplets). Tout au plus cels permettrait d'entrevoir très vaguement de quoi il s'agit. Je ne dis pas ça pour pousser au délespoir, mais pour encourager : la mathématique continue à avancer à grand train, et Bourbaki sent les bottes de sent lieues que quiconque doit chausser c'il veut le rattraper (le train)  $\mathcal{M}(s)$ .

Pour le moment, part de l'élémentaire, tout d'abord de la logique, puis de la théorie des ensembles, ensuite sont exposées (toujours de manière axiomatique) les deux structures fondamentales, la JopoloLie générale et de l'éligèbre, ensuite on pesce à des structures plus complexes!: spaces vectoriels topologiques, fonctions de variables réelles, intégration. La deuxième partie sur probablement intibulée éligèbre commutative. Le dernier fascicule paru concernant les étables de lie n'a pas de place encore marquée dans l'ensemble.

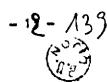
La précision des dénominations étant une comition essentielle de l'avancement de toute science et les vocables d'usage courant s'avérant en nombre insuffisant pour la demande, les savants se voient obligés de forger des termes nouveaux. La langue française est particulièrement peu propre à enfanter de nouveaux mots et des dérivés velebles (qui à jamais pu en tirer de <u>eau</u> ou de <u>feu</u> sans fabli, recourir au latin ou eu grect).

<sup>(1)</sup> thingheiling 1 y a des domaines très vivints de la mathématique actuelle que Bourbaki laisse (provisoirement?) en dehors de ses préoccupations, par exemple les "mathématiques finies", et aussi la Théorie des fonctions réconsives qui joue un rôle de plus en plus important en mátamathématique et en logique. Consideration de la mathématique de la mathématique de la mathématique de ses préoccupations, et aussi la Théorie des fonctions réconsidere qui joue un rôle de plus en plus important en mátamathématique et en logique. Consideration de la mathématique de ses préoccupations de la mathématique de la mathématique de la mathématique de la mathématique de ses préoccupations, et aussi la Théorie des fonctions réconsidere qui joue un rôle de plus en plus important en mátamathématique et en logique. Consideration de la mathématique de la mathématique



Une bonne connaissance de cette dernière langue est nécessaire dans les sciences naturelles. La physique et la chimie ont la ressource des vocables artisanaux et industriels plus ou moins décantés. Les mathématiciens ont en général avec bonheur utilisé les ressources du français commun et Bourbaki se montre sur ce point d'un tempérament fort cocardier. En dehors de morphisme" (fils décapité des homo-, homeo-, iso-, etc. morphismes — inventions, je crois, germaniques), et des jections (bi-, in-, sur-, etc) latinisantes, l'astuce a été d'employer des mots d'usage courant, en leur donnant une définition précise et évidemment, tout autre. Ainsi, en dehors des matrices pré-bourbakistes, on voit fileaver les tonneaux, les socles, les germes, les clans, les boules, les pavés, les filtres, les carapaces, et j'en passe. Seuls les treillis répugnent à Bourbaki auxquels il préfère les ensembles réticulés; "treillis" lui paratt peut-être trop "caserne".

Aussi certaines phrases (avec ces mots) donnert-elles parfois
à sourire à cause de leurs implications quotidiennes. Je ne pense pas
qu'il y ait là une manifestation particulière de l'humour de Bourbaki,
humour dont on parle. Contestilunce le nom de Nicolas Bourbaki en exima
numer humour. Il y a les feuilles volantes intitulées "mode d'emploi" comme
s'il s'agissait d'un produit quelconque. Humour encore dans un ouvrage
de cet ordre, je veux dire demandant quelque contention d'esprit, de
signaler tout d'un coup comme hoyen princtechnique que le signe V rappelle



jours et presque exclusivement l'ensemble vide. Humour encore, de relever le gant jeté pour Henri Poincaré en donnant l'assemblage que l'on appelle "ensemble vide" (Ø) (p. 67, fasc. XVII , Ensembles II);

Wow \_\_

L' le critique, souvent injuste, de H. Poincaré en particulier, porta un coup sensible à l'école de Peano et fit obstacle à la diffusion de ses doctrines dans le monde mathématique " (Eléments d'Aistoire des vathématiques p. 21). La comina (mi and l'homens.

Une réforme n'est pas faite par les mollassons. Les sciences, gonflées de faits, ont constamment besoin de dégraissage (exemple : la chimie). Mais combien d'habitudes il faut combattre ! Aussi est-il nécessaire qu'il n'y ait pas de concessions et c'est ce que Bourbaki a fort bien compris au risque du paradoxe et de l'humour. Lorsqu'on est persuadé que la déchéance de la "géométrie", déchéance "inéluctable" (p. 196 du chapitre), lorsqu'on est persuadé que la "mine est tarie", que ce "chapitre de la théorie des groupes, et des invariants peut-être considéré comme clos jusqu'à nouvel ordre" (p. 196), on ne va pas faire un sort à ces "théorèmes" de la géométrie euclidienne qui firent souf-frir bien des écoliers, que 11 on peut débobiner à l'infini et qui ne font plus la joie que des amateurs (\*\*) (C. D.

(1) the Ob cette absention, on peut supposer des raisons log- ques mous hop techniques four fu'on y insiste ici.

Si l'homothétie apparaît à la page 2 du chapitre II/de l'Algèbre la droite (homogène) page 38, la nition de parallèles n'apparaît que page 127, les translations donn l'apprendice H qui lui-même n'apparaît que dans la seconde édition de ce chapitre, le parallélogramme dans l'exité à 1 de l'appendice II (600), le théorème du quadrilatère complet dans l'appendice III, ex. 7 (per 144), et le théorème de Desargues dans l'ex. ta 145); quant aux involutions, aux symétries et aux similitudes, on ne les découvre que dans le chaptire (toujours de l'Algèbre) pages 95, 97 et 98 respectivement, et enfin le théorème de Pythagore page 100 comme conséquence d'une définition du chapitre II, appendice II, d'une autre définition (celle de projecteur l'au paragraphe 1 du chapitre et de l'identité, page 18 du même fascicule relative aux applications sesquilinéaires. Un esprit chagrin pourrait trouver que le pont aux ânes est une passerelle sur un ru ; mais non, c'est devenu le pont de Tancarville ! car notre théorème enjambe non plus seulement l'espace euclidien défini sur le corps des réels mais encore Frim howers les deplacements p. 101, les conjoues dans les bien d'autres. للب: exi<sup>2</sup>23 et 25, les rotations p. 152, l'angle de deux droites page 168, l'angle droit page 170, les fonctions trigonométriques page 171, porquei ci-

KO.

Fonds Queneral SCD Inversité de Bourgogne - Droits réservés continuons, nois trouveront le cercle unité dans l'ext 2 du chapitre 10, de la 1757, la sphère dans l'ext 12 (page 179), la puissance d'un point par rapport à une sphère (MANION) l'inversion (page 180).

Tout ceci est particulièrement significatif exemplaire et problement. la géométrie élémentaire étant en général chose assez connue; c'est pourquoi je me suis attardé sur cette question.

Styry 3

2- 2

Quelle sont les raisons de l'axiomatisation ? Voici ce que disent par exemple Eilenberg et Steenrod dans leurs \* Foundations of Algebraic Topology.

"Le bénéfice principal d'un traitement exfonatique tient surtout

"à la simplification qu'elle apporte dans la démonstration des théorèmes.

Les démonstrations básées directement sur les axiomes sont généralement simples et "conceptuelles" (satisfaisantes pour la raison). Il n'est plus nécessaire qu'une démonstration soit alourdie par la lourde machinerie utilisée pour définir les groupes d'homologie. On n'e plus besoin de se demander à la fin d'une démonstration : est-ce qu'elle tient encore avec une autre théorie de l'homologie? (car il y en a plusieurs) Quand on a démontré qu'une théorie de l'homologie satisfait aux axiomes, on peut se passer de la "machinerie", de sa construction. Les axiomatisations réussies ont toujours conduit à de nouvelles techniques de la démonstration et à un nouveau langage correspondant."

Paus le daputé consaul aux membles ordonne, les deprisitions abshaites d'élément/ maximal, etc, pourront paraître des subtilités; de même dans

Fonds Queneau - SCD Université de Bourgogne - Droits réservés

le chapttre VI de l'Algèbre, les notions d'élément étranger, d'élément extrême, etc. ; le lecteur réticent n'en voit pas "l'utilité" et, suivant les usages de l'exposé axiomatique, on ne le prévient pas de la cenèse et de la nécessité de ces distinctions. Un en découvre l'intérêt (et l'on admire la puissance de la méthode chapitre VII, paragraphe 1, no 4 et 5, proposition 6, que cela permet de donner une double (et parallèle) démonstration, et de l'infinité des nombres premiers, et de l'infinité des polynomes unitaires irréductibles sur un corps K.

On comprend alors que la notion de divisibilité, peur s'appliquer à tous les (ou au maximum de) "cas" a dû être généralisée et que c'est dans le cadre de la théorie des groupes ordonnés (et réticulés) qu'elle peut l'être et s'appliquer alors non plus seulement aux nombres réels, mais aussi aux ensembles d'éléments quelconques qui peuvent prendre la dite structure.

Parallèlement, on a développé une théorie des équations dont les coefficients ne sont plus nécessairement pris dans le corps des rationnels.

De même, maintes soi-disant prétendues subtilités de le le de la topologie préparent une théorie des fonctions qui s'applique non seulement aux nombres réels (cf. le livre IV) ou complexes, mais encore aux nombres p - adiques, aux corps finis, etc. was the control of th

(2.11.8)

Ce qu'on perd en "intuition" on le g gne en efficacité. À ce propos je citerai volontiers Caillois, parlant non pas de mathématiques mais de sciences expérimentales - (page 17 de <u>Féduse et Cie</u>). Pour le savant - contrairement au naîf plein de bon sens qui classerait ensemble tous les animaux à quatre pattes par exemple - "la vraie tâche consiste manuraire de déterminer des correspondances souterraines, invisibles, inimaginables pour le profane... Ces rapports inédits articulent, au contraire, des phénomènes qui paraissent d'abord n'avoir rien de commun... Des solutions hétérogènes dissimulent efficacement à l'investigation naïve les démar- ches disparates d'une économie profonde dont le principe rependant, demeure partout identique à lui-même. C'est lui qu'il importe de découvrir. ".

Naïvement, par exemple, les evales sont plus proches parents des cercles que les paraboles ou les hyperboles. Le rapport existant entre les coniques, la classification algébrique des courbes - à cela s'applique très précisément la phrase de Caillois. Il est vrai qu'il s'agit là d'une géométrie considérée un peu comme science naturelle et classificatoire.

Plus loin (page 39), Caillois, après avoir rappelé que la station debout et la main (au lieu du sabot ou de la griffe) présentent primitivement des inconvénients, écrit : " Tout se passe comme si l'homme, chaque "fois, "choisissait" une solution qui lui nuit dans l'immédiat, mais qui plui ménage bientôt un surcroît de pouvoirs; "(Cette phrase s'applique strictement à l'axiomatisation (+) (?).

En mecherchant à abstraire au maximum, Rie mathématicien se prive de la sacro-sainte intuition. Il semble parti dans le lune, on se perd en

F (1) seun un compte rendre de fuscione XIV para deu. Mattemet unt Gryste, on hit framoujus le différence de rejalle): 11 The abstrict approach in this case pays healing hamisome dividends 11 (le securt healtement de Kendrie.)

conjectures sur le pourquoi des définitions (voir plus haut), il semble qu'on s'égare dans les nuées.Par exemple, certaines théories de l'homologie ne permettent plus de calculer les groupes d'homologie. Lorsqu'on a raffiné la théorie des fonctions d'une variable réelle, etc., il semblait que ces raffinements sur la notion de continuité ne fussent que de la scolastique, du cheveu coupé en quatre, etc. Mais les mathématiciens qui s'y livraient avaient le "flair" - d'importants développements des applications des mathématiques n'existent qu'à cause de l'abstraction ci-dessus désignée. De même pour celui qui se limite à l'espace euclidien, à quoi bon distinguer les espaces normaux, séparés, réguliers, etc ? Tout ceci sera valable lorsqu'on passera aux espaces fonctionnels. Il n'en est pas toujours ainsi d'ailleurs ; certains mathématiciens manquent de "flair" et abstraction dens un sens "mort". Nais il est vrai aussi qu'il est toujours difficile d'assurer qu'une théorie mathématique ne "servira" jamais à rien. On a déja cité ici-même des exemples, tella théorie des coniques du calcul des centre de la conique de calcul des contre de la conique de calcul des contre de la calcul de la des carrés latins.

Certains esprits pensent qu'il faudrait pour Comprendre" les motions de la mathématique moderne en décrire l'origine. Mais Leibniz, dans ses Nouveaux Essais a déjà montré ce qu'avait d'illusoire ce munich pédago (a se pensent que Bembrhi renform à bout Common d'infigue.

argumenta plus colides serent mentric plus lois.

" lin quelque sorte, l'homme (et the je pout die le mathématicien axiomatisant)

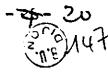
CENTRE DE DOCUMENTATION RAYMOND QUENTATION RAYMOND RA s'appauvrit, il se dénude à l'extrême (n'est-ce pas là la qualité des axiomes qui paraissent au premier abord quasiment vidés de toute signification ?), mais pour acquérir une plus grande diversité de conduites effide caces (c'est bien le cas pour les conséquences déduites des axiomes). En même temps, il "évite" tout organe trop spécialisé comme l'aile et la negeoire merveilleusement adaptés mais d'un seul usage. (Pour reprendre un exemple déjà cité : la théorie de la divisibilité des entiers, qui ne "fonctionne" plus dans d'autres corps de nombres). » En fait, il faut partir du plus général pour arriver aux résultats les plus fins - c'est-à-dire au "concret" et aux applications.

Quand on mène une grande affaire comme Bourbaki, il ne faut pas être seulement fort, il faut aussi être souple. Les fascicules, de la théorie des Ensembles (à l'exception du l'ascicule de Résultats - qui parut le premier, daté de 1939, mais dont la justification de tirage est du presier février 1940, let la couverture du 5)} - parurent bien après les premiers fascicules d'Algère et de Topologie, quoique la lecture de ceux-ci se fonde naturellement sur ceux-là. Bourbaki anticipe aussi quelquefcis sur son programme, ces allusions à un état plus avancé de la mathématique s'entourant d'astérisques. Enfin, il a publié des errata - parfois

R.Q.

Fonds Queneau - SCD Université de Bourgogne - Droits réservés

copieux. Avant d'avoir dirigé, moi-même, une encyclopédie, je ne me doutais pas que l'erreur fût aussi sournoise et multiferme, je faisais tout de même assez confiance aux ouvrages dits "de référence". Je n'y avais jamais remarqué de coquilles, par exemple. Depuis que j'ai dû lire ligne par ligne une entreprise qui a qui execunt pris comme signe et label une coquille celle du nautile -, j'en découvre maintenant chez les autres ! partout ! Dans les dictionnaires les plus chevronnés ! Nême une chez Bourbaki, pourtint fort attentif. Comme je la lui avais signalée, il me répondit que c'était par humour qu'il l'avait laissée, pour distraire un peu le lecteur au passage. Au lieu "d'ensemble filtrant à gauche et à droite", il y a "ensemble flirtant à droite et à gauche". Belrireduile de rruta de Bourbaki, on verra relevé outre les coquilles, des figures incorrectes ou des exercices faux, certaines finesses oubliées dans une démenstration, etc. Ce qui servit étonnaht, c'est qu'il n'y en ent pas ; je dirai nême que c'est là un titre de gloire, cette autocritique, d'ailleurs à peu près inévitable, et cette modestie, pur signe de l'esprit scientifique dans des ouvrages élémentaires qui ressassent des trucs archi-connus (ce qui est là condamnable), il y en a chez les plus grands mathématiciens (plusieurs ouvrages ont été consacrés à ce sujet dont un notamment par un mathématicien belge, quelque peu excentrique, Maxime Lecat). Je ne rappellerai que celle qui se trouve au paragraphe 299 de ce monument du génie mathématique que sont les Recherches Arithmétiques de Gauss, erreur qui ne fut détectée qu'en 1921 par L. E. Dickson, erreur "désastreuse" dit-on.



Tout ceci n'empêche pas les Eléments de Bourbaki d'être un monument de rigueur. Les errata ne sont que véniels. Bourbaki a les dernières années, détail non négligeable, changé de format/de présentation. Celle-ci s'est renouvelée, le papier est d'une autre espèce ; les exercices sont réunis en fin de fascicule, etc; Wais il ne faut pas oublier le père matériel, si l'on peut dire, de Bourbaki, à savoir son premier éditeur Enrique Freymann, homme singulier que j'ai l'honneur d'avoir un peu connu, et auquel est dédié le fascicule 17:

"Il y a bientôt vingt ans, dédaignant les consells de prudence out lui venaient de toute part, Enrique Freymann décidait d'accueillir un auteur complètement inconnu du public scientifique."

de nombreux paradoxes. A servicia en admiren plus le schéma 8.

<sup>(8)</sup> fellette préfere a est anni je dondire, de la surtième éclision



Les progrès se passent quelquefois dans l'errata. C'est ainsi que la définition I, page 99, lignes 5 à 9, concernant la somme d'une famille d'ensembles, est remplacée dans un errata par une définition beaucoup plus bourbakienne.

l'intersection d'une famille d'ensembles avant celles de deux ensembles.

Ceci est conforme au principe bourbakien de commencer par le plus général.

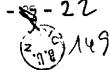
Wais il s'agit du fascicule XVII; dans le fascicule I, paru vingt\_cinq
ans plus tôt, on définissait plus banalement d'abord la réunion et l'intersection de deux ensembles. Il est aussi intéressant de comparer la définition de la source dans le fascicule Résultats avec celle que l'on trouve
dans le fascicule XVII (complété par l'errata). Unautre progrès à signaler
dans Bourbaki, en passant du fascicule I au fascicule XVII, est celui concernant l'axiome du choix. Dans le fascicule I, l'axiome du choix fait encore
l'objet d'une mention expresse et il est exprimé sous cette forme : "Îl
y a équivalence entre

que joue soit x, il existe y ter que @ (k,y)

et:

il existe une application f de E dans F telle que, pour tout x, (x,y).)

[hadit alors que "nous signalerons parfois que la démonstration de tel héorème en dépend ou non," (fascicule I, page 26).



Dans le fascicule XVII (page 106), vingt cinq ans plus tard, le dit énoncé est à peu près escamoté : chapitre II, paragraphe 5, n° 4, sur les produits pattiels, on s'aperçoit que pour vent de le digérer, grâce à un passage en petits caractères : il existe en effet un ensemble dont chaque élément est un "représentant" de chaque membre d'une famille d'ensembles. « Intuitivement, on a donc "choisi" un élément x, dans chacun des X ; l'introduction du signe logique — et des critères qui en gouvernent l'emploi nous a dispensé d'avoir à formuler un "axiome de choix" pour légitimer cette opération (4).?

Dans un fascicule ultérieur (le fascicule XXI), dans la <u>Note</u>

<u>historique</u> consacrée à la <u>Théorie des Ensembles</u>, nous lirons qu'une des
principales innovations apportées après les <u>Principia</u> à la logique, est

l'emploi du signe T apar Hilbert (qui l'écrit différemment d'ailleurs) et qui, entre autres utilités, a celle de "dispenser de formuler l'axiome

de choix dans la théorie des Ensembles, " (p. 81).

dementante de l'assimilarie de l'assimil

The sour

9 [ (1) Il fant dire en toute importanté pre d'antre, monthématriture logitaires voiteurs l'importance de ce symbole.

(tan)

R.Q.

Fonds Queneau - SCD Université de Bourgogne - Droits réservés

l'occasion de la troisième édition des quatre premiers chapitres de la Topologie fénérale, qui présente de nombreux amendements et additions trop techniques pour être signalés ici, nous constaterons deux faits : l'un le succès matériel et éditorial de cette entreprise (1 autre son influence et son autorité qu'il n'est pas exagéré de qualifier de mondiales Un point reste noir : l'enseignement. Si de grands efforts sont faits tant dans l'enseignement supérieur que dens le secondaire et le primaire, on est encore loin du compte. Bourbaki commence à être maintenant assez connu du "grand public", mais la légende veut en faire un auteur difficile et de son traité l'aboutissement ultime de la science mathénatique actuelle. Qu'on se détrompe ; comme je l'ai déjà dit ci-dessus, il faut prendre le mot <u>Eléments</u> dans son sens précis (reut-être y avait-il quelque humour dans le choix de ce mot au départ) et ne pus croire qu'y est inclus le dernier mot de la science. Il y a d'ailleurs un sujet d'inquiétude : avant que les Eléments bourbakistes ne soient assimilés, la pointe avancée de la recherche est déjà bien loin. L'écart que Eourbaki a essayé de Combler, entre le pédagogique et la recherche, ne semble pas diminuer, au contraire ; mais il n'y a peut-être pas là cependant un trop grand drame par le fait que l'ensemble de la pensée humaine se bourbakise et que, comme je l'ai déjà signalé plus haut, les esprits jeunes, de plus en plus, trouvent "naturelles" des notions qui il y a trente ans, ne semblaient, par leur abstraction, accessibles qu'à de très très grosses têtes. A ce sujet, je citerai ce passage significatif de la préface d'A. Grothendieck m récomment du me vous de voliantant scientifie une reclame four maissant de vite merhimotifie du élambles solon tricules Boniakips.

Vontante de vite merhimotifie du élambles solon tricules Boniakips.

Deur firscitules (I et IV) en sont à lun troitrème échtion, ment (I to tet, V, VI, VII,

10 VIII, 1x, XVII) à leur deux deux deux de leux de leux de leur de le



à ses <u>Eléments de féométrie Alrébrique</u>, fascicule I : <u>de langue des</u>

<u>fichémas</u>. (Ici encore je ferai remarquer que le mot "éléments", bien que

pris strictement, ne doit pas faire illusion et que l'ouvrage en question

ne passe pas, à l'heure actuelle, pour une lecture aisée) :

"Nous croyons utile de prévenir les lecteurs que, tout comme les une auteurs eux-mêmes, ils auront sans doute quelque difficulté avant de s'accoutumer au langage des schémas, et de se convaincre que les constructions habituelles que suggère l'intuition géométrique reuvent se transcrire, essentiellement d'une seule façon raisonnable, dans ce langage propre à l'exprimer avec toute la précision et la généralité voulues.

"En l'occurence, la difficulté resychologique tient à la nécessité de transposer aux objets d'une catégorie déjà assez différente de la catégorie des ensembles (à savoir la catégorie des préschémas, ou la catégorie des préschémas sur un préschéma donné) des notions familières pour les ensembles : produits cartésiens, lois de groupe, d'anneau, de module, fibrès, fibrès principaux homogènes, etc. Il sera sans doute difficile au mathématicien, dans l'avenir, de se dérober à ce nouvel effort d'abstraction, pout-être assez minime, somme toute, en comparaison de celui, fourni par nos pères, se familiarisant avec la Théorie des Ansembles. "

On no saurait mieux dire.

to faijant rependant la répende fue no fère "se familianisèrent avec une théraire de Buyembles sui étaites contraditation per sur les nes fils expendent de puelle façon Bombaki fondera la notion de catégorie sontin de toute forçon bombaki fondera la notion de catégorie sontin de toute forçon bombaki fondera la notion de la pontie de toute de toute forçon bombaki fondera la notion de

(1) - (1) Loude, to fruit of the form of the foundations of Set Theory) days Infinition Methods, \$550 Vorsine, Lance, 1961.