On admet maintenant assez facilement que le plus important traité de mathématique français — d'une importance mondiale même — qui bouleverse l'enseignement (nous verrons ces différents points tout à l'heure) soit signé d'un nom de fantaisie, pis même d'un nom hérité d'un canular normalien. Mœurs même on en est fier en France, décidément l'esprit de sérieux en a pris un bon coup, où sont les vieilles barbes des universitaires d'autrefois?

Ce nom comme chacun sait désigne une collectivité; sans doute la nécessité d'un pseudonyme se serait-elle imposée un jour ou l'autre, il se trouva que le pseudo était déjà prêt. Rappelons rapidement que ce fut, à l'origine, la visite d'un grand et fictif mathématicien suédois à l'École Normale, le dit mathématicien portant le nom de Nicolas Bourbaki. Pourquoi? De tous les généraux de la guerre de 70, c'est, après tout, le plus sympathique. Mais enfin ça ne suffit pas pour faire un choix. Peut-être ses origines grecques satisfaisaient-elles des jeunes gens qui se proposaient de rédiger un nouvel Euclide. Mais, au fait, sait-on déjà si, à l'époque du canular, les dits jeunes gens avaient déjà ~~[illegible]~~ envisagé la rédaction de leur traité, inspiré par le désir universaliste de clarifier le foisonnement des mathématiques contemporaines, ~~[illegible]~~ nationaliste d'introduire en France des méthodes demeurées privilèges de l'étranger, mais il ne s'agit pas de pluriel, il s'agit de singulier, car il ne s'agit ici

il n'est pas inutile de rappeler que le ~~[illegible]~~ traité de Bourbaki s'intitule en fait "Éléments de mathématique"

que d'une seule méthode : la méthode axiomatique.

Les grandes découvertes mathématiques « contemporaines » (entre guillemets) connues du grand public – et des philosophes (j'y reviendrai) – sont ~~aff~~ les géométries non-euclidiennes, les espaces à plusieurs dimensions (confondues souvent avec les précédentes), l'existence d'une « logistique » ~~certes~~ certes ridiculisable – bref ce qu'on trouve dans Henri Poincaré. On sait tout de même qu'il y a une théorie des ensembles (qui date des années 1875) et une théorie des groupes (qui remonte au début du XIX^e^ siècle), cette dernière avantageusement connue en raison de ~~la~~ l'existence tragique, bouleversante et romantique ~~[illegible]~~ d'un jeune mathématicien qui l'utilisa avec profondeur. Mais on ignore, en général, qu'il y a à peu près autant de différence entre la mathématique contemporaine et la mathématique à l'époque de Poincaré (de ses débuts) qu'entre celle-ci et la mathématique euclidienne. On ignore généralement, ai-je dit, à vrai dire on commence à le savoir ; des efforts sont faits pour « moderniser » l'enseignement. Il ne se passe pas de mois qu'on ne voit ~~[illegible]~~ des traités destinés à initier ~~les~~ aux math. modernes les jeunes. Quant à initier les vieux, ce sera assez difficile ; un [illegible] mathématicien qui a terminé ses études vers 1930 et qui n'a pas suivi le développement des mathématiques modernes, est encore plus dérouté en ouvrant le traité de Bourbaki que quelqu'un qui n'y connaît rien.

Des habitudes mentales sont prises qu'il est difficile de se défaire. Quelqu'un qui n'y connaît rien a plus de chances de s'y retrouver. La raison de ce double phénomène est elle-même double : l'abstraction amène à considérer des structures extrêmement simples qui sont celles-mêmes de l'esprit humain (et qu'a retrouvées Jean Piaget par son épistémologie génétique), elles doivent être accessibles à tout esprit non-prévenu ; un enfant (non complexé) comprend intuitivement et immédiatement avec la notion d'ensemble, de réunion, d'intersection, etc. Qu'est-ce qui fait la difficulté de lecture du traité de Bourbaki pour un mathématicien des années 30 ? c'est qu'il cherche à voir, lui, pourquoi (je le suppose intelligent) on a besoin de telles abstractions, pourquoi les mathématiciens ont-ils été amenés à ces abstractions qui lui paraissent à lui habitué au « concret », des fonctions continues partout dérivables ou des fonctions analytiques d'une variable complexe, parfaitement inutiles, pour ne pas dire saugrenues. Pour qui a découvert la théorie des groupes de substitution

Dans le concret (ou même dans l'abstrait) le visage qu'elle prend dans Bourbaki peut au premier abord déconcerter (A)

On a reproché à Bourbaki son abstraction extrême. En fait, il s'agit de l'entendre : si la base en est au maximum axiomatique (et nous verrons plus loin ce qu'il faut entendre par là), les développements se font en fonction du « concret » à atteindre, c'est-à-dire d'une part des desiderata de la physique, d'autre des

Une fois qu'il a compris la nouvelle présentation, il peut s'en servir en pensant aux alias non-dits ; (« que peut-on y comprendre, si on ne sait pas de quoi il s'agit »)

Il la partage avec nombre d'auteurs contemporains, lesquels parfois s'en expliquent. Je prends par exemple, les Foundations of Algebraic Topology d'Eilenberg et MacLane (1952) qui donne une axiomatique ~~de l'homologie~~ d'une théorie chère à bon nombres d'adjudants de Bourbaki (puisque son traité n'en parle pas encore). ~~Ce que~~ Voici ce que disent ces deux auteurs dans leur Préface : « Aucune raison (motif) n'est donnée des axiomes. ~~Le débutant~~ On demande au débutant de les prendre tels quels comme articles de foi — [jusqu'à la fin du ch. IV]. Ce ne doit pas être difficile, car la plupart de ces axiomes sont naturels, et leur ensemble possède une beauté interne suffisant pour inspirer foi chez le moins crédule. »

Utilité future, beauté interne : tels sont les deux raisons qui doivent éviter trop au débutant les inquiétudes quant aux raisons qui font qu'on a choisi tel axiome plutôt que tel autre. Utilité, beauté, ne sont-ce pas là les deux caractères de la mathématique, ceux qui la rapprochent de l'art et la différencient. Une théorie mathématique vivante (et voici en passant ceci qui est une autre histoire) est à la fois belle et utile. Et ceci sans qu'il y ait contradiction entre ces deux aspects. Une a demande, de la physique ~~est~~ que parfois la naissance de théories caillouteuses, le praticien est peiné : le mathématicien —

fignole ensuite son travail et la route cahoteuse devient la belle autostrade sur laquelle le praticien roule sans difficultés. Le physicien taille son chemin à la serpe, à la pioche, à la pelle. Les mathématiciens trouvent le sentier [illegible], l'aménagent. Si le physicien a besoin que son chemin soit plus large ou aille plus loin, le mathématicien ~~opère~~ avec son bouledozeur. Puis il perfectionne, etc. —

Là est la différence entre mathématique et art : il y a toujours divergence, contradiction entre beauté et utilité, sauf peut-être en architecture, le plus mathématique des arts (avec la musique, s'il est vrai). Seule la religion a servi de moyen terme dialectique entre beauté et utilité de l'art. Mais ça sort du sujet. Je reviendrai plus loin sur la beauté. Revenons à l'axiomatisation problèmes « vivants » (je ne dirai pas « à la mode ») pour les mathématiciens d'aujourd'hui. Si le lecteur (prévenu) trouve Bourbaki « abstrait », trop abstrait — c'est que lui-même ne sait pas ce que demande la physique, ses besoins (je me vois ici obligé de citer des faits banals : quelle chance pour Kepler. Copernic que la théorie des coniques ait préexisté ! quelle chance pour Einstein d'avoir trouvé tout prêt le calcul tensoriel et le calcul différentiel absolu. Et dans un autre domaine : P.A. MacMahon, mathématicien anglais, écossais même 1854-1929, ~~des années~~ 18.. avait élaboré une théorie (celle des rectangles latins) par goût du paradoxe et défi à l'utilitarisme ; il la jugeait à tout jamais stérile et inutile. Elle sert au contraire maintenant couramment dans les plans d'expérience]. La physique a besoin de notions extrêmement abstraites. Le physicien peut même élaborer une notion contradictoire comme la fonction δ de Dirac. Absurde, cette fonction δ, ~~toujours~~ nulle mais dont l'intégrale est égale à 1 lorsque la variable pour toute valeur de la variable tend vers 0. Or on se sert de cette fonction, elle est même fort utile en électricité. Il y a là un « problème » — résolu par Laurent Schwartz avec sa théorie des distributions — théorie axiomatique, abstraite) (axiomatisée maintenant) qui permet de fonder rationnellement la théorie de cette pseudo-fonction et permet aussi au physicien de l'utiliser sans fausse honte.

Mais laissons-là le lecteur à préjugés. La lecture des Éléments ~~Bourbaki~~ dit le prospectus « ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction ». Naturellement, ~~nous retrouvons ici encore~~ il ne faut pas prendre cette phrase au pied de la lettre ; et le « certain » peut être qualifié de litote. ~~[illegible]~~ Il ne faut pas s'imaginer en effet que Bourbaki « se lit comme un roman » (les romans, il est vrai, maintenant, ne sont plus si faciles à lire), on s'y casse facilement les dents. Dans un autre passage de ~~ses~~ les Éléments Bourbaki dit qu'il s'adresse aux gens qui savent au moins lire et compter. Effectivement. Pour tout livre, c'est pourquoi la lecture est en un sens liberté, c'est pas comme la musique, on peut refermer le livre. Mais dira-t-on si Bourbaki ne s'adresse ni aux vieux mathématiciens enfoncés dans leurs habitudes ni aux lecteurs trop dépourvus, à qui s'adresse-t-il ? Eh bien aux jeunes qui ont une bonne formation mathématique – et qui ont l'« esprit ouvert ». Et ~~le~~ phénomène remarquable se produit : les jeunes se forment rapidement et dépassent des maîtres qui ont eu ~~du~~ mal à se sortir de l'ornière des mathématiques françaises « classiques » et un peu encroûtées de l'après-guerre de 14-18 (laquelle détruisit un nombre appréciable de mathématiciens). Il y a là un phénomène qui ressemble un peu à ce qui s'est passé dans le développement de la psychanalyse : pour être psychanalyste il faut avoir été psychanalysé. Mais alors qui a analysé Freud ? Eh bien, on le sait maintenant, il s'est autoanalysé génialement, il s'est génialement débrouillé. Il en est de même avec Bourbaki qui dut s'enseigner lui-même, et forger lui-même son propre esprit.

~~Naturellement, il ne s'est~~ Mais il ne faut pas croire non plus que, merveille génétique, Bourbaki se soit engendré lui-même. Son père même peut être nommé c'est Hilbert, et il eut comme nourrices van der Waerden, Emmy Nöther, Artin, Banach, etc. Rien que des noms étrangers comme on voit. Et c'est là où intervient le point de vue nationaliste dans la genèse de Bourbaki, dont j'ai parlé plus haut, pose un thème.

Poincaré a joué un mauvais tour à la mathématique (et à la philosophie) française en raillant le grand Peano et sa définition du zéro (aussi Bourbaki l'a-t-il repris — sous logistique (comme on disait alors) sa forme actuelle.) Son autorité a détourné les mathématiciens français des recherches logiques : tout le développement de la logique moderne s'est fait à l'étranger ; en France avant Bourbaki on ne peut citer que Herbrand, mort jeune) ; et qui pis est de l'axiomatique. Or, c'était là que

 54

se trouvait la source vivifiante de la mathématique, c'était même un retour aux sources grecques, et c'était Hilbert qui dispensait cette eau thérapeutique et rajeunissante. La mathématique française s'est trouvée et par le fait de la guerre de 14-18 destructrice de jeunes et par l'influence de Poincaré, en pleine crise gérontique. Un peu de retard, et le retard s'accroît, le retard ~~BAC~~ mathématique suit une courbe exponentielle. ~~Cette~~ On sait d'autre part que la mathématique est une science de « jeunes », c'est autour de 20-25 ans que le mathématicien « fait » son oeuvre. Vers les années 30, quelques jeunes mathématiciens ont pris conscience du retard pris par les mathématiques françaises non seulement dans ~~la recherche~~ l'enseignement (il l'est encore, voir plus haut et voir ci-dessous) mais encore dans la recherche. Et ils créèrent Bourbaki. Et depuis la guerre de 45, trois Français ont eu la médaille , le prix Nobel mathématique, Schwartz, Serre et Thom.

~~[illegible]~~ [Ici il me faut partir dans deux sens : l'originalité de Bourbaki (comme suite à ce qui a été dit ci-dessus sur Hilbert) ; le rajeunissement perpétuel de Bourbaki (ce qui implique des notions sur le groupe Bourbaki, cooptation etc.)
Il y a aussi à citer le pense de Leibniz – mais où ?
Je parlerai tout d'abord du rajeunissement]

Bon très bien dira-t-on, votre Bourbaki qui devait avoir 20 ans vers les années 30, en a 50 maintenant. Il doit avoir vieilli nécessairement votre fictif mathématicien, il doit avoir pris du retard. Eh bien non, Bourbaki n'a pas vieilli puisqu'il ne peut pas vieillir.

Bourbaki, si je ne l'ai pas déjà dit, est une collectivité qui se renouvelle par cooptation. Il a été décidé que les bourbakistes dépassant la cinquantaine ne font plus partie du groupe sinon à titre consultatif et vénéré. Comment travaillent les Bourbaki ? On dit que... une rumeur veut que... l'un d'entre eux (ou deux ou trois au maximum) soit chargé de la rédaction d'un fascicule. Cette première mouture est envoyée aux différents Bourbaki qui se réunissent ensuite en congrès ; on examine alors cette première rédaction, on la critique : en général, il n'en reste rien. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que ces rédactions critiquées donnent un ensemble non vide de théorèmes, propositions, scholies et, éventuellement, axiomes. Il faut ajouter les exercices au sujet desquels il y aurait maintes remarques à faire et les notes historiques qui n'en provoqueraient pas moins.

rappeler l'expression d'un ensemble ...

Mais faisons tout d'abord les remarques inspirées par les exercices. Le lecteur naïf (mais qu'est-ce qu'un lecteur naïf) a en effet de quoi s'étonner lorsqu'il prend les exercices qui se trouvent après chaque § d'un fasc. du Bourbaki (dans le dernier fascicule

[illegible]

gares, ils sont tous en fuite) et il y aura de quoi. Je ne parle pas ici de la difficulté de solution, mais simplement de l'énoncé. C'est qu'en effet, il (le lecteur naïf) y trouvera proposé comme exercice ce qui, dans les traités précédents, avaient toujours figuré comme théorème et même comme théorème important. ~~Les exemples abondent, je n'en citerai que quelques uns.~~

Exemples ex. 1 ch. V § 3 de l'algèbre : prouver que l'ensemble des nombres transcendants sur Q a la puissance du continu.

encore les exercices du § 1 du ch. VII correspondent à un ouvrage sur la théorie des nombres ; les ordinaires aujourd'hui ne sont également traités que dans les exercices

Qu'est-ce à dire ? Comment expliquer que ce qui fut théorème et même théorème important soit devenu simple exercice. Faut-il supposer le ~~simple~~ mathématicien actuel plus intelligent que celui d'autrefois ? bien sûr que non. Mais alors ? Il y a là l'aboutissement d'un (phénomène) courant dans l'histoire des mathématiques. La démonstration d'un théorème nouveau est parfois extrêmement ardue, compliquée, etc. ; puis on la simplifie ; puis elle entre dans l'enseignement ; il devient courant ; ses applications en rendent son usage facile ; enfin s'il n'est pas essentiel, s'il n'est pas non plus nécessaire au "style" actuel, aux développements à venir, ils tombent au rang d'exercice. Il y a des exceptions : des théorèmes qui restent toujours difficiles, des théorèmes qui restent toujours essentiels.

Dans les arithmétiques anciennes, pour prendre un exemple simple, un chapitre était consacré à l'addition des ~~rrres~~, un autre à l'addition des sols, un autre à l'addition des vaches, etc. Seuls quelques grands esprits ~~de ce~~ en ce temps parvenaient à l'abstraction de l'addition d'objets quelconques. Maintenant, on ~~demande~~ exige (et l'on obtient en général) cette abstraction d'enfants de huit ans.

Plus récemment, on étudiait longuement les propriétés de l'ellipse (après celles du cercle bien sûr), ~~puis~~ de la parabole, puis de l'hyperbole. Puis est venu le moment où l'on a étudié globalement, simultanément, les coniques; et les théorèmes particuliers, dépendant de th. généraux, relatifs à l'ellipse, à la parabole, etc. sont tombés eux aussi au rang de simples exercices.

Encore une fois ce n'est pas pour diminuer l'originalité de Bourbaki, mais on trouve la même attitude dans des ouvrages d'enseignement à l'étranger, par ex. dans l'Intr. à la th. des nombres de Vinogradov où l'on propose comme exercice de démontrer que la ~~suite~~ des nombres premiers est en nombre infini (suite plus loin)

Ainsi en est-il pour Bourbaki. On passe avec lui à un nouveau degré d'abstraction; il en résulte que des théorèmes soit particuliers soit marginaux tombent au rang de simples exercices, les uns parce qu'ils sont ~~particuliers~~ simples applications de théorèmes plus généraux, les autres parce qu'ils n'ont pas de rôle à jouer dans des exposés futurs, qu'ils sont en quelque sorte des impasses (au moins relativement à l'allure générale que Bourbaki donne à son traité) (il y a quelquefois des repentirs: Lemme l'exemple; même maintenant les termes nouveaux ou définis seulement dans les exercices figurent dans l'Index terminologique — ce qui ne se faisait pas dans les premiers fascicules).

Ce qui rattache le plus Bourbaki à l'"ancienne mathématique", ce sont ses notes historiques qui viennent d'être recueillies en un volume séparé. Pour le lecteur naïf, ce que ne seront plus les lecteurs d'ici quelques années, on ne peut que conseiller la lecture d'un fascicule bourbakien que de commencer par la note historique. S'il est effrayé par l'abstraction, il y verra ses objets concrets; s'il ne sait pas de quoi il s'agit, il sera renseigné par ladite note. C'est ainsi que formes sesquilinéaires et quadratiques liquident en quelque sorte la géométrie "élémentaire"; ou, si l'on veut, il découvrira la géométrie "élémentaire" comme application, immédiate, ~~suppos~~ conséquence de la théorie des formes quadratiques; de même qu'il découvrira le calcul ~~des probabilités~~ comme appendice de l'intégration.

développer et citer

suite Il y a là une certaine attitude mentale peut-être. Il est certain que pour Vinogradov un tel théorème est aussi simple que 2 et 2 font 4. Le fait est que la démonstration en est immédiate et que — une fois connue — on peut la qualifier d'intuitive. Il en est de même de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ dont la démonstration est actuellement ~~ef.~~ quasi-immédiate. Finalement un homomorphisme n'est pas plus abstrait ~~qu'un~~ nombre entier (on développera sa simple pédagogie) Nous reviendrons plus loin sur cette question des exercices.

Nous allons revenir un peu sur nos pas pour adoucir certaines phrases précédentes et qui pourraient laisser croire que l'originalité de Bourbaki est nulle. En fait, ~~certains~~ les Bourbaki sont des mathématiciens éminents qui ont participé à l'avancement de la mathématique et qui en ont fait profiter le Traité. Pour n'en citer qu'un exemple les notions de structure uniforme et de filtre qui donnent toute leur originalité au premier fascicule de Topologie Générale sont dues l'une à André Weil, l'autre à Henri Cartan. Il faut dire aussi que de nombreux travaux des membres du Bourbaki ne peuvent apparaître dans le Traité, puisqu'il s'agit, ne l'oublions pas, d'un livre élémentaire.

On ne saurait trop insister sur ce point; plus loin nous allons traiter des différentes originalités de Bourbaki. Pour le moment, voyons un peu ce qu'implique ~~cette notion d'élément~~ ce que veut dire ceci : élément.

Il s'agit effectivement de mathématiques élémentaires, ce qui ne veut point dire faciles — non de mathématiques "supérieures". On n'y trouve (jusqu'à présent) ni la théorie analytique des nombres, ni les travaux de MM. Serre et Grothendieck sur les faisceaux cohérents, les produits tensoriels de modules, le théorème de Riemann-Roch, etc. qui ne passent pas pour de la petite bière. Pour le moment on part de l'élémentaire, tout d'abord de la logique, puis de la théorie des ensembles, ensuite sont exposées les deux structures fondamentales ~~l'Algèbre et la T~~ la Topologie Générale et l'Algèbre, ensuite on passe à des structures plus complexes Espaces vectoriels topologiques, Fonctions de variables réelles, Intégration. ~~La~~ deuxième partie sera probablement intitulée Algèbre Commutative. ~~Le~~ ~~Les~~ fascicule ~~sur~~ déjà paru concernant les Algèbres de Lie n'a pas de place encore marquée dans l'ensemble.

cf page suivante ⊗

Évidemment lorsque Bourbaki dit qu'on peut aborder la lecture de son livre sans préliminaires, le lecteur étant simplement supposé doué d'un certain "pouvoir d'abstraction", il faut prendre une telle affirmation « cum grano salis ». Ensuite Bourbaki fait la réserve qu'il est préférable d'avoir une bonne connaissance du programme de maths gén. Ailleurs encore il dira qu'il n'écrit pas pour ceux qui ne savent pas le calcul ni reconnaître un chiffre d'un autre. Effectivement, il s'adresse à quelqu'un qui veut lire; c'est là toujours la même question: Qui veut lire? On ne peut forcer à lire un livre, Hegel lui-même l'avait bien vu. Donc, celui qui veut lire Bourbaki, il lui suffit d'avoir outre de la ~~bonne~~ volonté, effectivement un certain "pouvoir d'abstraction".

⊗ Entre la lecture de Bourbaki et ~~autres~~ les travaux originaux de mathématique moderne, il y a encore un monde. Une bonne connaissance de Bourbaki ne permet pas d'aborder la lecture d'un mémoire de M. Serre ou de M. Grothendieck. Tout au plus cela permettrait d'entrevoir vaguement de quoi il s'agit. (Il est vrai que Bourbaki n'a encore rien publié concernant la géométrie différentielle, la géométrie Algébrique, etc.) Je ne dis pas ça (que ça ne permet pas de lire les mémoires originaux) non pour pousser au désespoir, mais au contraire pour encourager: la mathématique continue à avancer à grand train, et Bourbaki sont les bottes de sept lieues que quiconque doit chausser s'il veut rattraper le train.

… propres mémoires récents.

Nous allons passer maintenant aux différentes originalités de Bourbaki; nous avons vu celles concernant les exercices, les notes historiques, le contenu même, nous allons maintenant passer au vocabulaire et au style.

La précision des dénominations étant une condition essentielle de l'avancement de toute science et les vocables ~~[illegible]~~ d'usage courant s'avérant d'un nombre insuffisant pour la demande, les savants ~~ont pris l'usage~~ se virent obligés de forger des termes nouveaux. La langue française étant particulièrement peu propre à enfanter de nouveaux mots et des dérivés valables (~~[illegible]~~ qui a jamais pu en tirer ~~des composés [illegible]~~ de eau ou de feu ?) Il faut recourir au latin (aqueux, igné) ou au grec. Une bonne connaissance du grec est nécessaire en médecine, en biologie. La physique et la chimie ont la ressource des vocables artisanaux et industriels plus ou moins décantés. Les mathématiciens ont en général avec bonheur utilisé les ressources communes du français et Bourbaki se montre sur ce point d'un tempérament fort national. En dehors de morphisme (fils décapité des homo, homéo, iso etc. morphismes – inventions je crois germaniques), et des -jections (bi, in, sur- etc.) ~~assez~~ latinisantes, l'astuce a été d'employer des mots d'usage ~~[illegible]~~ courant, en leur donnant une définition précise. Ainsi on a en dehors des matrices pré-bourbakistes, on voit fleurir les tonneaux, les sortes, les germes, les clans, les boules, les pavés, les filtres, les carapaces,

Seul point : Bourbaki se refuse à treillis et préfère ensemble réticulé.

Nous allons maintenant passer au style sur lequel il n'y a rien à dire sinon qu'il est strict, rigoureux, etc. parfait quoi et celui des notes historiques est tout particulièrement remarquable. Mais du style nous allons glisser à l'humour.

Pourquoi cet humour ? il y a le nom de N. Bourbaki, l'allusion aux correspondants joués dans la préf du ch. I. Humour encore les feuilles volantes intitulées « mode d'emploi ~~du traité~~ » comme s'il s'agissait d'un produit quelconque. Humour encore dans un ouvrage de cet ordre tout d'un coup de signaler comme moyen mnémotechnique que le signe $\cup$ rappelle union. Humour encore, dans les exemples, ~~destinés~~ de citer presque toujours et presque exclusivement l'ensemble vide. Humour encore, de relever le fait jeté pour Henri Poincaré en donnant la déf. de [illegible] et que — ait 10000 termes (p. 67 fasc. XVII - Ensembles II)

pourquoi cet humour ?

il faut chambarder un peu le vieil édifice.

Je regrette d'écrire ceci si tard, j'ai l'air de courir à la victoire. Bourbaki a maintenant gain de cause. Dans l'enseignement on commence à .. Dans le monde entier etc. Il est vrai que l'on voit des initiations aux maths mod. [déjà ridicule]. Faut du temps

Passer à des considérations sur la pédagogie

éliminer d'abord les considérations de Le Lionnais à Cerisy (l'h. des mathématiciens).

Les volumes, gonflés de faits, ont constamment besoin de défrichage (Ex. la chimie) mais combien d'habitudes, il faut combattre! Aussi qu'il ne renouvelle puisqu'il n'y ait pas de consensus et c'est ce que Bourbaki a

fort heureusement un refus du paradoxe et de l'humour

Je l'ai dit ailleurs (ou je commence à le dire ici) même une réforme n'est pas faite par les mollassons. Lorsqu'on est persuadé que la ~~section~~ de la "géométrie" ~~en total~~, déchéance "inéluctable" (p. 196 déchéance du ch. 9), lorsqu'on est persuadé que la "mine est tarie", que ce "chapitre de la théorie des groupes et des invariants peut être considéré comme clos jusqu'à nouvel ordre" (p. 196) on ne va pas faire un sort à ces « théorèmes » de la géométrie euclidienne qui firent souffrir tant d'écoliers, que l'on peut débobiner à l'infinité et qui ne font plus la joie que des amateurs.

Aussi voit-on des théorèmes célèbres renvoyés dans les exercices. Cette question des exercices déjà abordée plus haut revient donc, et à une prise de position, et à une prise de position (ce qui est net dans le cas des nombres ordinaux : cette théorie n'ayant guère eu d'applications, de vie, comme elle demeure isolée, l'essentiel en est renvoyé dans les exercices.

Reprenons, par exemple, cette question de la géométrie si maltraitée. Si l'homothétie apparaît à la p. 2 du ch. II de l'Algèbre, la droite (homogène) p. 38, la notion de parallèles n'apparaît que p. 127 (dans l'app. II), les translations (p. ?), le parallélogramme dans l'ex. 1 de l'appendice II (p. 131), le théorème du quadrilatère complet dans l'appendice III ex. 7 (p. 144) et le théorème de Desargues dans l'ex. 9 (p. 145) quant aux involutions, aux symétries et aux similitudes, on ne les découvre que dans le ch. 9 (Groupes de l'Algèbre) pp. 95, 97 et 98 respectivement et enfin ——

qui lui-même n'apparaît que dans la seconde édition de ce chapitre

~~si l'homothétie apparaît et les translations dans l' appendice II de la 2ème éd. du chap. II de l'Algèbre, l'involution n'apparaît que p. 95 du ch. 9, la symétrie p. 97, la similitude p. 98~~) le th. de Pythagore p. 100 (comme conséq. d'une déf. du ch. II app. II, d'une autre (celle de projection) au § 1 du chap. 8 et de la formule 12 p. du même bouquin relative aux applications semi-linéaires. Un esprit chagrin pourrait trouver que le pont aux ânes est devenu le pont de Tancarville ; et il l'est ! car notre th. enjambe non plus seulement l'esp ~~euclidien~~ de dim. finie sur le corps des réels mais encore bien d'autres.

Continuons : les déplacements p. 101, les coniques dans les ex 23 et 25, les rotations p. 152, l'angle de deux droites p. 168, l'angle droit p. 170, les fonctions trigonométriques p. 171. Pourquoi si loin ? Généralement on a étendu les fonctions trigonométriques définies sur le corps des réels aux nombres complexes (d'où la formule d'Euler $e^{i\pi} = -1$ qui fait rêver les parascientifiques et les autres). Ici où nous sommes dans l'axiomatique, et où nous savons qu'il existe bien d'autres corps (ou anneaux) de nombres que celui des réels et des complexes on commence par établir des formules valables pour toute algèbre (plus ex. toute sous-algèbre d'un certain espace (ensemble) des applications linéaires) engendrée par les similitudes directes de forme par une forme bilinéaire laquelle est elle-même définie comme application du produit de deux modules dans un bi-module.

Continuons, nous trouverons le cercle unité dans l'ex. 2 du § 10 (p. 175) la sphère dans l'ex. 12 (p. 179), la puissance d'un point par rapport à une sphère (p 180), l'inversion (p 180).

Je me suis étendu sur ce point, parce qu'il est particulièrement signifiant et compréhensible — la géométrie élémentaire étant en général chose assez connue.

On a généralisé de plus en plus, les faits se sont accumulés, d'où la nécessité de l'axiomatisation.

Quelles sont les raisons de l'axiomatisation ? Voici ce que disent par exemple Eilenberg et Mac-Lane déjà cités :

~~« Le gain principal d'un traitement axiomatique est surtout dans la simplification de la preuve des théorèmes.~~

« Le bénéfice principal d'un traitement axiomatique tient surtout à la simplification qu'elle apporte dans la démonstration des théorèmes. Les démonstrations basées directement sur les axiomes sont généralement simples et « conceptuelles » (satisfaisantes pour la raison). Il n'est plus nécessaire qu'une démonstration soit alourdie par la lourde machinerie utilisée pour définir les groupes d'homologie. On n'a plus besoin de se demander à la fin d'une démonstration : est-ce qu'elle tient encore avec une autre théorie de l'homologie ? [car il y a plusieurs théories de l'homologie, trop long à expliquer] quand ~~une théorie~~ on a démontré qu' de l'homologie satisfait aux axiomes on peut se passer de la « machinerie » [l'artillerie lourde] de sa construction.

les axiomatisations réussies ont toujours conduit à de nouvelles techniques de la démonstration et un nouveau langage correspondant." Nous avons déjà vu pour Bourbaki ce qu'est son nouveau langage. Il y a donc aussi la question de la démonstration. C'est là un point qu'il ne faut pas passer légèrement. L'amateur se satisfait parfois de ~~preuves~~ démonstrations insuffisantes ou même de démonstrations fausses tels les quadrateurs et les Fermat-löser ou même, seul, l'intéresse le résultat. Un philosophe des sciences, un ingénieur, chacun pour des raisons différentes, peuvent n'être intéressés que par les résultats. Un philosophe des sciences, par exemple, qui veut commenter la généralisation de la notion de fonction périodique (je prends un sujet un peu vieillot) se satisfera de savoir qu'il n'y a pas de fonction (uniforme) ~~de~~ à plus de deux périodes et que si une fonction a deux périodes, le rapport de celles-ci est imaginaire. La démonstration lui importera peu ; ce en quoi il a tort, car tout l'intérêt réside dans la démonstration. Un mathématicien est essentiellement un homme qui démontre.

on conjecture qu'il y a un Dieu, qu'il y a un Être, que la perception est intentionnelle, qu'il faut aider le F.L.N., etc.

22

Ce qui importe en mathématiques, c'est la démonstration. En philosophie, on se contente de conjectures. Les sciences non-mathématisées se situent entre les deux : on conjecture, après expérience.

Ce n'est pas à dire que le mathématicien ne fasse point de conjectures ; cela peut l'aider, mais pour lui cela n'aura guère de valeur informante, tant qu'il n'y aura pas de démonstration. C'est surtout en théorie des nombres que l'on connaît ce genre de conjectures : p. ex. celle de Goldbach "presque" démontrée par Vinogradov. Mais d'autres ont été démontrées fausses, ou ~~plutôt~~ encore on a trouvé des cas où la conjecture était ~~erronée~~. Je citerai plusieurs ~~deux~~ cas ~~particulièrement brillants~~ significatifs :

0) l'exemple des carrés gréco-latins

1) Polya a conjecturé que pour tout nombre ≥ 2, il y a autant de nombres qui ont un nombre pair de facteurs premiers que de nombres en ayant un nombre impair. Cela est vrai jusqu'à 800000. Mais elle est fausse pour x vers $1.845 . 10^{361} = e^{831847}$ (MR, 1960, 3391)

~~$\lambda(n) = (-1)^{a_1 + \dots + a_r}$ ($n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots$)~~

~~$T_1(x) = \sum_{n \leq (x)} \lambda(n)$~~

~~$L(x)$ toujours négatif. Pour $x = 48512$, "presque" positif !~~

~~$L(x) = -2$~~

2) Dans la th. des nombres premiers, on a conjecturé

Littlewood

~~[illegible]~~

et faux lui-même !) que

$$\pi(x) < \mathrm{li}\, x$$

vrai pour $x < 10^7$; on a des listes partielles jusqu'à 10^9 : toujours vrai. Il y a une infinité de valeurs qui rendent fausse cette conjecture ; on prouve qu'il y a un nombre X pour lequel il y a un nombre plus petit x' tel que $\mathrm{li}\, x' > \pi(x')$; ce nombre X est égal à $10^{10^{10^{34}}}$.

~~f. quasi : pour $n > 10^{10^{17.86}}$, n impair est la somme de 3 n. impairs premiers. (démontré par Vino. 19.5.533) (14 R, Ec. 3/591)~~

On peut aussi citer John Leech (18.8.62)

On remarquera que toutes ces conjectures sont basées sur l'observation des nombres « petits » et démenties par des nombres très « grands », le nombre de (ci-dessus) étant supérieur à celui des atomes contenus dans l'Univers (à ce jour), c'est dire qu'ils sont "grands" ! Encore un autre exemple : ~~[illegible]~~ Schnirelman a démontré que tout nombre pair est au plus la somme de trois cent mille nombres premiers (on sait que Waring au XVIII^e s. a conjecturé (conjecture !) que tout nombre pair est la somme de <u>deux</u> nombres premiers, ce qu'on <u>constate</u> être vrai pour les nombres « petits ».) Dans le même ordre d'idée, Vinogradov (19.5.533) a démontré que pour $n > 10^{10^{17.86}}$, ~~impair~~ tout nombre impair est égal à la somme de trois nombres impairs premiers. Qu'est-ce que cela veut dire? Eh bien que pour conjecturer il ne faut pas être myope. Ensuite que seule compte une démonstration qui elle sera vraie pour tout nombre. Enfin, d'une façon pythagoricienne, les très grands nombres ne sont pas indifférents, ne forment pas un magma indifférencié. D'ailleurs comme chacun sait il n'y a pas de nombres inintéressants. Hardy raconte qu'allant voir Ramanujan, il lui dit : « Tiens je suis venu dans un taxi portant le numéro 1729. Ce n'est pas un nombre bien intéressant. » « Si, dit Ramanujan après un moment de réflexion, c'est le plus petit nombre qui soit de deux façons différentes la somme de deux cubes. » Anecdote célèbre et presque éculée. Mais mieux est de plus on peut démontrer qu'il n'y a pas de nombre entier inintéressant. On peut répartir en effet les nombres entiers en deux classes, celle des nombres intéressants et celle des nombres inintéressants. Celle-ci aura un plus petit nombre ; or le plus petit nombre des nombres inintéressants est un nombre intéressant. Il faudra donc le mettre dans la première classe. Et ainsi de suite.

Pour revenir à la démonstration (transition habile!) disons qu'un mathématicien jugera toujours une démonstration peu satisfaisante si elle est basée sur des astuces étrangères au sujet ou encore qui elle est basée sur l'énumération et la résolution de différentes possibilités. L'effort du mathématicien porte aussi bien sur la simplification des démonstrations que sur la découverte de nouveaux théorèmes. Par exemple en théorie des nombres, il est satisfait s'il découvre des démonstrations « élémentaires » sans appel à l'analyse. Lorsque ~~Lindem~~ Hermite et Lindemann eurent démontré (par des moyens analytiques) que e et π sont des nombres transcendants, les mathématiciens n'eurent de cesse d'en trouver une démonstration « élémentaire » (ne faisant appel tout au moins qu'au théorème fondamental de l'algèbre). Hilbert, par exemple, a été de ceux-là — lui qui pour démontrer (toujours en théorie des nombres) que tout nombre suffisamment grand est la somme de G(k) puissances $k^{ièmes}$ au plus ou si on supprime "suffisamment grand" de g(k) puissances au plus, "utilise" une intégrale de volume dans un espace à 25 dimensions, nombre qu'il peut ensuite réduire à 5 » (G.H. Hardy, trois problèmes célèbres de la théorie des nombres p. 17. Je signale en passant que le nombre 79 est la somme de 19 bicarrés et que "l'on n'en connaît aucun nombre qui en exige davantage" ce à quoi il est fait allusion dans Odile p.)

Mais est-il possible d'obtenir toujours une démonstration élémentaire? Ce que le théorème de Gödel semble nier.

Une démonstration est une réduction (plus ou moins (contraire) à une tautologie ; mais toute démonstration trop claire est « triviale ». Ici le mathématicien est pris entre deux tendances : la réduction axiomatique d'une part ; de l'autre, la joie esthétique, l'enchantement que lui procure une démonstration difficile. On parle alors avec gourmandise d'un théorème « profond », d'une démonstration « involved ».

La démonstration de l'irrationalité de la diagonale du carré de côté 1 fut un théorème « profond », dramatique même. On y est habitué, ~~[illegible]~~ tellement sa démonstration est presque triviale.

Le théorème de Jordan, démonstration ardue d'une chose simple, demeure ardue. C'est la trop grande intuitivité de l'objet du théorème qui, de plus, choque l'esprit que la démonstration en soit difficile. Mais comme dit Veblen (Analysis situs, 1931, p 23) à propos de l' "orientation" d'un complexe : « les définitions adoptées paraîtront sans doute très artificielles, mais cela signifie qu'il est ~~[illegible]~~ que l'on a à définir une idée aussi intuitive (et élémentairement intuitive) que celle de « sens ». »

D'autres énoncés simples (le th. des quatre couleurs) n'ont pas de solution. Par contre des (par ex.) énoncés difficiles ont des démonstrations simples, d'une façon surprenante ; par exemple on les obtient « par surprise » ; par exemple les théorèmes de ~~[illegible]~~ théorie des nombres qui apparaissent comme des sous-produits de la théorie des fonctions elliptiques (chez Jacobi et chez Hermite).

Je choisirai maintenant un autre exemple (simple) des bienfaits de l'axiomatisation.

Prenons par exemple le chapitre relatif aux <u>Ensembles Ordonnés</u>, les définitions « abstraites » de plus grand élément, d'élément maximal, etc. peuvent sembler précisément « abstraites » (de même dans le ch. VI de l'<u>Algèbre</u>, les notions d'élément étranger, d'élément extrémal, etc.); le lecteur n'en voit pas l'« utilité » et suivant les usages de l'exposé axiomatique on ne le prévient pas de la genèse et de la nécessité de ces constructions. On n'en découvre l'intérêt — et la puissance (de la méthode axiomatique) que lorsqu'on trouve dans le ch. <u>VII</u>, § 1 n° 4 et 5, proposition 6 que cela permet de donner une double (et parallèle) démonstration, et de l'infinité des nombres premiers, et de l'infinité des polynomes unitaires irréductibles sur un corps K.

On comprend alors que la notion de divisibilité, pour s'appliquer à tous (au maximum) de « cas » a dû être généralisée et que c'est dans le cadre de la théorie des groupes ordonnés (et réticulés) qu'elle peut l'être; et s'appliquer alors non plus seulement aux nombres entiers réels, mais aussi aux ensembles d'éléments — quelconques — qui peuvent prendre la structure de groupe ordonné (et réticulé).

Parallèlement on a poursuivi une théorie des équations qui doit être valable également pour des ensembles structurés d'éléments les plus variés et non plus seulement aux équations dont les coeffi-cients sont pris dans le corps des rationnels.

De même maintes soi-disant prétendues subtilités abstraites ~~la « théorie des fonctions »~~ de la topologie préparent une théorie des fonctions qui s'appliquent non seulement aux nombres réels (cf. le livre IV) ou complexes, mais encore aux nombres p-adiques, aux corps finis, etc. Pour ne pas parler des « fonctionnelles ».

À ce propos je citerais volontiers Caillois, parlant plus semble-t-il spécialement des sciences expérimentales - (p. 17 de Méduse et Cie) sur le savant (naturaliste ou physicien) — à l'opposé du naïf, du bon sens qui classerait ensemble tous les animaux à quatre pattes p. ex. — « la vraie tâche consiste au contraire à déterminer des correspondances souterraines, invisibles, inimaginables pour le profane... Ces rapports inédits articulent, au contraire, des phénomènes qui paraissent d'abord n'avoir rien de commun... Des solutions hétérogènes dissimulent efficacement à l'investigation naïve les démarches disparates d'une économie profonde dont le principe, cependant, demeure partout identique à lui-même et qu'il importe de découvrir. »

Pour ne pas reprendre les exemples archiconnus de Poincaré, on pourrait dire p. ex. que les ~~ovales~~ cercles sont plus proches ~~des cercles~~ des ovales que des paraboles. le rapport existant entre les coniques, la classification algébrique des courbes — à cela s'applique très précisément la phrase de Caillois:

il est vrai qu'il s'agit là d'une géométrie considérée un peu comme science naturelle et classificatrice.

Il y aurait de meilleurs exemples à citer.

Plus loin (p 39) — et ici nous retrouvons notre justification de l'axiomatisation — Caillois ~~[illegible]~~, après avoir rappelé que la station debout, la main (au lieu du sabot ou de la griffe) présentent primitivement des inconvénients, écrit : « Tout se passe comme si l'homme, chaque fois, « choisissait » une solution qui lui nuit pour l'immédiat, mais qui lui ménage bientôt un surcroît de pouvoirs. » Cette phrase s'applique strictement à l'axiomatisation.

En recherchant à abstraire au maximum, le mathématicien se prive de faits, des applications (en apparence). Il semble partir dans la lune, on se perd en conjectures sur le pourquoi des définitions (cf. plus haut), il semble qu'on se perde dans les nuées, dans les abstractions. ~~[illegible]~~ Lorsque l'on a raffiné la théorie des fonctions d'une variable réelle, ~~[illegible]~~ on il semblait que ces raffinements sur la notion de continuité ne fussent que de la scolastique, de l'enculage de mouches, etc. Mais les mathématiciens qui s'y livraient avaient le « flair » — d'importants développements des applications des mathématiques n'existent qu'à cause de l'abstractisation ci-dessus décrite. (Il n'en est pas

~~Il semble~~ aussi se priver de la sacro-sainte intuition

certaines théories de l'homologie ne permettent plus de calculer les groupes d'homologie

De même celui qui se limite à l'espace euclidien, au lieu de distinguer des espaces normaux, séparés, accessibles etc. ? Tout ceci sera valable lorsqu'on passera aux espaces fonctionnels toujours aussi d'ailleurs ; certains mathématiciens manquent de « flair » et abstractisent dans un sens « mort ». Mais il est vrai aussi qu'il est toujours difficile d'assurer qu'une théorie mathématique ne « servira » jamais à rien. L'exemple de la théorie des coniques est classique ; Einstein fut heureux de trouver tout prêt le calcul différentiel absolu ; de même R.A. Fisher ~~pour~~ l'analyse de la variance fut heureux de trouver les carrés latins, tous inventés par Mac Mahon (pas le maréchal, bien sûr ; c'était un écossais comme Bourbaki était grec) « avec l'espoir que [sa] découverte ne pourrait jamais être utilisée à quoi que ce soit » (Dugué et Girault, Analyse de variance et plans d'expérience p. 31)

Certains esprits pensent — mais ils sont déjà réfutés (par conséquent ce § sera à placer plus haut) — qu'il faudrait ~~détruire~~ l'enfance des concepts pour « comprendre » les notions de ~~[illegible]~~ la mathématique moderne. P. ex. pour la topologie en revenir au sempiternel tore, aux « modèles », etc. ; pour le calcul différentiel, à la vitesse, etc. Quel que soit l'intérêt parfois pédagogique de cette façon de faire, Leibniz a montré (cf. chez [illegible]) ce qu'elle a d'illusoire.
citation de Leibniz.

Des notions plus anciennes parlent dans l'usage courant. Et maintenant peut-on dire qu'un homomorphisme soit plus « abstrait » qu'un nombre entier ?

Ajoutons encore cette citation de Caillois (op. cit. p. 39) : " En quelque sorte" [l'homme, et ici je peux dire le mathématicien axiomatisant] s'appauvrit, il se se dénude à l'extrême [n'est-ce pas là la qualité des axiomes qui paraissent au premier abord quasiment vidés de toute signification], mais pour acquérir une plus grande diversité de conduites efficaces [c'est bien le cas pour les conséquences déduites des axiomes]. En même temps, il « évite » l'organe trop spécialisé comme l'aile et la nageoire, merveilleusement adaptés mais à un seul usage. [Pour reprendre un ex. déjà cité : la théorie de la divisibilité, pour les entiers, et qui ne « fonctionne » plus dans d'autres corps de nombres]. » En fait, il faut partir du plus général pour arriver aux résultats les plus fins.

J'y pense — ceci sans rapport avec ce que je viens d'écrire : Bourbaki quoi qu'on en dise est très décontracté — pour employer un mot vulgaire et courant. Cela est dû sans doute — et ceci montre que ça a un rapport direct avec ce qui vient d'être dit précédemment, à ce que Bourbaki pour ~~[illegible]~~ "abstrait" et "axiomatiste" qu'il soit, n'en est pas moins homme : c'est-à-dire que son activité est typiquement, constitutivement et je dirais même physiologiquement humaine. La synthèse part du concret pour retourner vers l'action : c'est le sentiment d'aisance dans le maniement d'outils puissants, c'est la familiarité avec des "objets" mathématiques satisfaisants pour l'esprit humain et cependant ~~pouvant~~ toujours être convertis à la demande en "objets" utilitaires
à la demande des hommes —

x

x x

2ème partie

Si je me suis enfin et non sans mal décidé à écrire cette présentation, c'est parce que j'ai pensé qu'il ne manquerait peut-être pas d'intérêt qu'elle fût écrite par un amateur et par un encyclopédiste. Amateur ? oui, de mathématiques. Mais qu'est-ce, qu'est-ce, qu'est-ce ??? Encyclopédiste — ou tout au moins directeur d'encyclopédie.

Amateur : comment peut-on être amateur en mathématiques ? Ça n'existe pas. D'une part il y a les professionnels — tous dans l'enseignement ou au CNRS, tous des fonctionnaires quoi, si j'en crois le manifeste des 76 en octobre 60. Et d'autre part les ignorants (ou même les hostiles). On pourrait ici glisser un passage sur les hostiles, les gens qui se flattent de ne pas savoir additionner deux et deux, qui s'indignent du [illegible] ou du [illegible] (comme Sacha Guitry, ce qui prouve qu'il pensait mal puisqu'il a collaboré avec les nazis) — mais ça relève aussi ça de la pédagogie, un chapitre que je traiterais peut-être ailleurs.

Bon. Mais la division n'est pas si tranchée. Entre les deux, il y a toute une gamme. D'abord les physiciens pour qui les mathématiques sont soit outils soit langage, et les ingénieurs, des gens qui ne connaissent qu'un bout de la question ; aux yeux du public, ils passent même parfois pour de « vrais mathématiciens ». Je me souviens avoir discuté avec des rédacteurs de l'Encyclo Pléiade qui voulaient mettre « Einstein, mathématicien. » Non : physicien. Et puis il y a ceux qui manient « des » mathématiques sans avoir à aborder des questions nouvelles, qui peuvent se laisser aller au train-train de l'usage : ingénieurs, etc. ou ceux qui n'ont à s'en servir que d'une façon élémentaire : expérimentateurs biologistes et psychologues. (qui peuvent poser des problèmes intéressants : les mathématiques discrètes). Il y a une autre catégorie de gens toute différente et qu'on peut appeler les amateurs-productifs ; ~~ingénieurs, militaires~~ ils se recrutent principalement parmi les ingénieurs et les militaires, plus rarement les médecins, les prêtres, les absolument en-dehors du corps. Leurs travaux portent principalement sur certains aspects élémentaires (et parfois fascinants de la mathématique) : c'est là que se recrutent les inventeurs en géométrie du triangle, ou amateurs de courbes des « bas degrés », les amateurs de carrés magiques et d'équations diophantiennes. Le bulletin des Sociétés Savantes (les tomes publiés) — contiennent de nombreuses communications de ce genre de « chercheurs ». Leurs travaux ne sont nullement méprisables, ils ont simplement le tort de se trouver en marge de la vie réelle des mathématiques. Lewis Carroll, s'il n'avait été un vrai professeur de mathématiques se serait situé de ce côté. J'ajouterai également que ces travaux ne sont non seulement pas méprisables, mais encore ingénieux, parfois très intéressants. [expliquer ce que c'est]

À la limite de ce groupe, il y a les Fermatlöser, les quadrateurs, les hétéroclites, les "fous littéraires" ou scientifico-littéraires, c'est-à-dire tous ceux qui ~~demeurent~~ sont étonnés que les mathématiciens professionnels demeurent impuissants à répondre à des problèmes aussi simples que le théorème de Fermat ou la quadrature du cercle ; l'exposé de ces problèmes est en effet accessible à qui n'a qu'une culture mathématique des plus élémentaires. (On pourrait y ajouter le ~~pb~~ problème des quatre couleurs, la conjecture de Waring, etc.) La réaction est alors curieuse :

— Comment ! un théorème aussi élémentaire, les professionnels sont incapables de le démontrer ? Quels cons ! non mais vraiment quels cons ! Eh bien moi, tout ignare que je suis, je vais leur montrer aux spécialistes qu'ils ne sont que des cons. C'est bien simple... voyons voir... ~~[illegible]~~

Par hasard, si je tombais sur quelque chose qui a échappé aux « professionnels » ? Tel est l'idée secrète, subconsciente. Si le type s'obstine, s'il persévère, si l'amour propre le prend, le saisit — alors il tombe dans le paralogisme, le sophisme, l'erreur, etc etc Si le type a par hasard (ce qui n'est pas normal)

quelque tendance quelque affection psychotique — voilà un nouvel hétéroclite en circulation.

On attend encore une découverte importante faite par un amateur de cette sorte. Il n'y en a jamais eu ; j'ajouterai : rien ne dit qu'il n'y en aura pas ; ce qui encouragera les hétéroclites à prospérer.

Il y a aussi les calculateurs, les amateurs de chiffres — ~~[illegible]~~ les chasseurs de nombres — ça c'est encore une classe à part et qui peut se livrer à des travaux fort utiles.

Qu'est-ce qui reste ? Les gens qui « s'intéressent » aux mathématiques pour l'amour des mathématiques. Ils sont bien peu nombreux, ils sont fort rares, j'ose me prétendre appartenir à cette catégorie. L'existence de cette catégorie a quelque chose de contradictoire en soi, je vais expliquer pourquoi, mais au passage il faut signaler une sous-catégorie ou une catégorie parallèle : celle des philosophes qui « s'intéressent » aux mathématiques, j'en parlerai ailleurs.

L'existence d'une telle catégorie a, dis-je, quelque chose de contradictoire en soi. Pourquoi ? Voici :

Il y a tout d'abord la tentation d'appartenir au précédent groupe. On ne « lit » pas un ~~traité~~ livre de mathématiques sans faire, à côté, le même travail. Si le livre a des exercices, il faut faire les (Il faut refaire les théorèmes) exercices. D'exercices en exercices on peut être mené à la tentation d'un travail original : dangereux ! si l'on est vraiment qu'amateur, c'est-à-dire pas spécialement doué. D'autre part, la tentation est de rester à l'« élémentaire ». Or c'est le « supérieur » qui est intéressant. Ce qui suppose une application plus longue, plus constante. Mais je me dispenserai de plus longues explications car je devient raseurs.

Je pense maintenant à l'Encyclopédie. Ce qui m'intéresse aussi dans Bourbaki c'est la façon dont il mène son affaire. Là je peux apprécier en technicien, ~~[illegible]~~ alors que jusqu'à présent j'ai surtout apprécié en profane.

Quand on mène une grande affaire comme Bourbaki, il ne faut pas être seulement fort, il faut aussi être souple. Les fascicules de la Th. des Ensembles (à l'exception du fascicule de Résultats – qui parut le premier, daté de 1939, mais dont la justification de tirage est du premier février 1940 (et la couverture du 5) – ça c'est drôle, je croyais l'avoir acquis et lu avant la guerre. Or n'étant pas revenu à Paris en 40 avant le mois d'octobre, quand ai-je donc pu l'acheter ? en tout cas ce n'est qu'en décembre 43 que je l'ai considéré comme lu.) parurent bien après les fascicules premiers d'Algèbre et de Topologie, quoique ~~ceux-ci~~ la théorie se fonde naturellement sur ceux-là. Bourbaki ne s'est pas privé non plus de faire, à l'occasion allusion à des états plus avancés de la mathématique ; il le fait toujours en entourant ces passages d'astérisques. Enfin il a publié des errata – parfois ~~[illegible]~~ copieux. Ça, c'est une chose que je n'avais pas expérimentée avant d'avoir dirigé, moi-même, une encyclopédie ; quoique de nature assez sceptique et méfiant, je faisais tout de même assez confiance dans les dictionnaires et ouvrages analogues. Je n'y avais jamais remarqué de coquilles, par exemple. Depuis que j'ai dû lire ligne à ligne une encyclopédie qui a pris d'ailleurs comme signe et label une coquille — celle du nautile —, j'en découvre maintenant chez les autres! partout! même une chez Bourbaki, pourtant fort attentif. Comme je la lui avais signalée, il me répondit que c'était par humour qu'il l'avait laissée, pour distraire un peu le lecteur au passage. Il y a au lieu d'« ensemble filtrant à gauche et à droite », « ensemble flirtant à droite et à gauche. » Pour revenir aux errata de Bourbaki, on y verra relevé outre des coquilles, des signes incorrects, certaines formules oubliées dans une démonstration, etc. Ce qui serait étonnant ([illegible]), c'est qu'il n'y en eût pas; j'irai même jusqu'à ce que c'est là un titre de gloire, un perfectionnement constant. D'ailleurs, à peu près inévitable. Il y en a dans les ouvrages élémentaires qui renferment des trucs archi-connus (ce qui est là inexcusable), il y en a chez les plus grands mathématiciens (plusieurs ouvrages leur ont été consacrés dont un notamment par un mathématicien belge, quelque peu excentrique, Maxime Lecat.) Je ne rappellerai que celle qui se trouve au § 299 de ce monument de génie mathématique que sont les Recherches Arithmétiques de Gauss, erreur qui ne fut ~~détectée~~ qu'en 1921 par L. E. Dickson, erreur « [illegible] ».

Tout ceci n'empêche pas le Traité de Bourbaki d'être lui aussi un monument de rigueur. Ses errata ne sont que vétilles.

Bourbaki a aussi, détail non négligeable, changé de format et de présentation. Celle-ci s'est renouvelée, le papier est d'une autre sorte : rajeunissement en soi. Venu aussi de l'extérieur dû principalement ~~grâce~~ à son nouvel éditeur Pierre Berès (il faudra que je le lui demande). Et ici il faut tout de même parler du père matériel, si j'ose dire, de Bourbaki, à savoir son premier éditeur Enrique Freymann, homme singulier que j'ai l'honneur d'avoir un peu connu, et auquel est dédié le fascicule 17 !

"Il y a bientôt vingt ans, dédaignant les conseils de prudence qui
" lui venaient de toute part, Enrique Freymann décidait d'accueillir
" un auteur complètement inconnu du public scientifique."

Dédicace émue, Bourbaki a du coeur, comme il sait être [illegible] avec son [illegible].

Bourbaki fait parfois des progrès : par exemple dans le premier fascicule paru, celui des Résultats de la Théorie des Ensembles, On définissait la réunion d'une famille d'ensembles qu'en supposant que ces ensembles appartenaient à un même ensemble (étaient des parties) d'un même ensemble. Dans le fasc. XVII, ving-cinq ans plus tard, le schéma 8 permet de définir la dite réunion sans ce présupposé. Cela est d'autant plus intéressant ~~puisque~~ que j'avais été particulièrement frappé par ce présupposé lorsque j'avais lu ~~ou plutôt~~ ~~reneranenerenver~~ le fascicule de résultats (§ 4 n° 2) Je m'étais ~~extasié~~ affuté ce raffinement et je pensais que Bourbaki évitait ainsi de nombreux paradoxes. Je ne puis qu'en admirer plus le schéma 8.

(cf. II, p. 88)

Les progrès se passent quelquefois dans l'errata - très abondants - nous y reviendrons. C'est ainsi que la définition 8 p. 99 lignes 5 à 9 concernant la somme d'une famille d'ensembles est remplacée dans un errata par une définition beaucoup plus bourbakienne.

On remarquera, à propos de toutes ces définitions, que Bourbaki, définit la réunion et l'intersection d'une famille avant celles de deux ensembles. Ceci est conforme au principe bourbakien de commencer par le plus général pour aboutir au particulier. Mais il s'agit du fasc. XVII; dans le fasc. I, paru vingt-cinq ans plus tôt, on définissait plus banalement d'abord la réunion et l'intersection de deux ensembles. Il est aussi intéressant de comparer la définition de la somme dans fasc. R avec celle sus-citée du fasc. XVII (+ errata)

39

Un autre progrès à signaler dans Bourbaki, en passant du fasc. IV au fasc. XVII est celui conernant l'axiome du choix. Dans le fasc. I, l'axiome du choix fait encore l'objet d'une mention expresse et il est exprimé sous cette forme : il y a équivalence entre

qque soit x, il existe y tel que R / x,y /

et :

il existe une application f de E dans F telle que, pour tout x, on ait R / x,y /

Il est dit alors que " nous signalerons parfois que la démonstration de tel théorème en dépend ou non". (fasc.I p.26)

Dans le fasc.XVII (p.I06) , vingt-cinq ans plus tard, le dit théorème est à peu près escamoté : ch.II, par.5, n° 4, sur les produits partiels, on s'aperçoit que l'on vient de le digérer, grâce à un passage en petits caractères. On vient de voir -mais en nous éclairant - qu'il existe un ensemble dont chaque élément est un "représentant" de chaque membre d'une famille d'ensembles. " Intuitivement, on a donc "choisi" un élément x, dans chacun des X_i; l'introduction du signe logique et des critères qui en gouvernent l'emploi nous a dispensé d'avoir à formuler un "axiome de choix" pour légitimer cette opération."

Dans un fascicule ultérieur (le fasc. XXII) , dans la Note historique consacrée à la Théorie des Ensembles, nous lirons qu' une des principales innovations apportées après les Principia à la logique, est le l'emploi du signe τ (par Hilbert - qui l'écrit différemment d'ailleurs) et qui entre autres utilités a celle de " dispenser de formuler l'axiome de choix dans la théorie des ensembles."(p.8I)

Nous ne rappellerons pas les vieilles querelles sur l'axiome de choix ~~[illegible]~~ dont on trouve des traces dans les premiers volumes de la collection Borel. ~~rappeler la vieille querelle~~ Qu'en disent les philosophes ? Rien. Car les soi-disant tels, ignorant tout des ~~revenons sur ce fameux signe τ~~ mathématiques se taisent ou déconnent.

Ex. cité par B. [illegible]